RAOUL BRICARD

Sur les aires et les courbes supplémentaires en géométrie sphérique

Nouvelles annales de mathématiques 5e série, tome 3 (1924), p. 41-57

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1924_5_3__41_0>

[O¹2a]

SUR LES AIRES ET LES COURBES SUPPLEMENTAIRES EN GÉOMÉTRIE SPHÉRIQUE;

PAR RAOUL BRICARD.

1. Le présent article ne renferme probablement rien de bien nouveau. Il a pour objet de préciser certaines notions courantes sur les aires et sur les courbes supplémentaires, en géométrie sphérique.

2. *Définitions et conventions.* — Suivant l'usage, je prends comme unité de longueur le rayon de la sphère sur laquelle sont tracées les figures étudiées, de sorte que l'aire totale de la sphère est le nombre 4π.

A chaque point de la sphère on peut attacher un sens positif de rotation sur la sphère autour de ce point (parce que la sphère est une surface *bilatérale*). Je conviendrai que ce sens est celui *de droite à gauche*, pour un observateur debout sur la sphère au point considéré.

J'appelle *arc régulier* un arc de courbe sphérique jouissant des propriétés suivantes : en chaque point il a un grand cercle tangent bien déterminé, et un cercle osculateur (nécessairement tracé sur la sphère) *autre qu'un grand cercle ou un cercle-point.* En un point d'un arc régulier, le *centre de courbure sphérique* est celui des deux pôles du cercle osculateur qui est le plus rapproché, et le *rayon de courbure sphérique* est le plus petit des deux rayons sphériques du même cercle. Il est compris entre o et $\frac{\pi}{2}$, bornes exclues (sauf peut-être en des points exceptionnels).

Quand un point M parcourt un arc régulier AB en allant de A vers B, le centre de courbure sphérique en M est constamment à gauche ou à droite du point M. Je dirai, suivant le cas, que l'arc AB est *à gauche* ou *à droite*. Deux arcs, l'un à gauche, l'autre à droite, sont de *sortes* différentes. Pour un déplacement infiniment petit du point M dans le sens indiqué, le grand cercle tangent en M tourne, autour d'un point infiniment voisin de M, d'un angle infiniment petit $d\varphi$ (*angle de contingence sphérique*). Cet angle de contingence est constamment positif pour un arc à gauche et négatif pour un arc à droite.

Un arc régulier et le même arc, parcouru dans le sens opposé, sont de sortes différentes. Un arc régulier et l'arc *antipode* (c'est-à-dire l'arc lieu des points de la sphère diamétralement opposés à ceux de l'arc donné) sont aussi de sortes différentes, étant bien entendu que les deux arcs sont supposés parcourus simultanément par des points qui ne cessent pas d'être antipodes l'un de l'autre.

Les courbes considérées ici seront formées d'arcs réguliers successifs en nombre fini, deux arcs réguliers pouvant être séparés par des *points d'inflexion*, des *points de rebroussement* ou des *points anguleux*. Un point d'inflexion est celui qui sépare deux arcs réguliers de sortes différentes tangents l'un à l'autre, et cela de telle manière qu'un point décrivant les deux arcs à la suite ne change pas le sens de son parcours au point considéré. Les points de rebroussement et les points anguleux n'ont pas besoin d'être définis. Pour simplifier l'exposition, je supposerai toujours que les points de rebroussement sont de *première espèce*, c'est-à-dire qu'ils séparent des arcs de même sorte. Les points de rebroussement de *seconde espèce*, qui séparent des arcs de sortes différentes, sont donc exclus (un point de rebroussement de seconde espèce peut être considéré comme formé par l'union d'un point de rebroussement de première espèce et d'un point d'inflexion).

Les courbes peuvent avoir des points doubles, à tangentes distinctes ou non; quand les tangentes ne sont pas distinctes, il faut convenir quels sont les arcs qui se prolongent l'un l'autre.

3. *Aire d'une courbe fermée sans point double.* — Soit C une telle courbe. Elle sépare deux regions sur la sphère, et l'expression : *aire de* C peut, *a priori*, désigner l'aire de l'une ou de l'autre de ces deux régions. Pour supprimer l'ambiguïté, donnons-nous sur C un sens de parcours. Alors l'une des régions est à gauche de C, l'autre à droite. J'appelle *aire de la courbe* C *orientée* et je désigne par (C) l'aire de la région *de gauche*.

Si la courbe C porte plusieurs points M, N, P se succédant quand on parcourt C dans un certain sens, la notation (MNPM) fait connaître à la fois ce sens en même temps qu'elle désigne l'aire (C).

Il est clair que l'on a

$$(\mathrm{MNPM})+(\mathrm{MPNM})=4\pi.$$

On reconnaît tout de suite que la définition précédente doit être élargie, *si l'on veut que l'aire d'une courbe varie toujours d'une manière continue, quand cette courbe se déforme elle-même continûment.*

Considérons en effet par exemple un triangle sphérique ABC *à gauche* (c'est-à-dire que le sens de parcours ABC laisse à gauche l'intérieur, au sens ordinaire du mot, de ce triangle). Alors (ABC) est l'aire, au sens ordinaire, du triangle.

Si, les points B et C étant supposés fixes, A varie de manière à traverser BC, ABC, une fois la traversée faite, devient un triangle à droite, et (ABC) passe d'une valeur très petite à une valeur voisine de 4π. Pour éviter cette discontinuité qui serait fort gênante, j'admettrai que l'aire du triangle, et plus généralement l'aire d'une courbe fermée C, *n'est définie qu'à un multiple près de* 4π. Si donc S est l'aire, au sens ordinaire, de la région à gauche de C, on prendra comme formule de définition

$$(C) = S + 4k\pi,$$

k étant un entier quelconque positif, négatif ou nul. J'écrirai plus brièvement, en employant la notation des congruences arithmétiques,

$$(C) \equiv S \pmod{4\pi}.$$

On peut presque toujours omettre la mention du module.

Le même fait se présente dans la mesure des arcs de cercle : sur le cercle orienté de rayon 1, la longueur algébrique d'un arc MN ne peut être définie qu'à $2k\pi$ près, si l'on veut que cette longueur algébrique varie d'une manière continue, quand les points M et N varient eux-mêmes continûment suivant des lois quelconques.

Si C et C′ sont, soit la même courbe fermée parcourue successivement dans deux sens opposés, soit deux courbes antipodes parcourues simultanément par deux points antipodes, on a

$$(C') \equiv -(C).$$

4. *Aire d'une courbe fermée quelconque.* — Établissons d'abord le lemme suivant :

Soient A, B, C, O *quatre points quelconques de la sphère, dont deux quelconques ne sont pas antipodes. On a*

$$(1) \qquad (\mathrm{OBC}) + (\mathrm{OCA}) + (\mathrm{OAB}) \equiv (\mathrm{ABC}),$$

OBC, OCA, OAB, ABC *étant des triangles sphériques au sens ordinaire du mot* (*côtés* $< \pi$).

Traçons complètement les grands cercles qui portent les côtés du triangle ABC. La surface de la sphère est ainsi partagée en huit triangles ABC, A'BC, AB'C, ABC', AB'C', A'BC', A'B'C, A'B'C', A', B' et C' étant les antipodes respectifs de A, B, C. En plaçant le point O successivement dans chacun de ces triangles, on reconnaît sans peine que la relation (1) a toujours lieu.

Soient maintenant A, B, C, D, O cinq points quelconques de la sphère. On a, d'après (1),

$$(\mathrm{OAB}) + (\mathrm{OBC}) + (\mathrm{OCA}) \equiv (\mathrm{ABC}),$$
$$(\mathrm{OAC}) + (\mathrm{OCD}) + (\mathrm{ODA}) \equiv (\mathrm{ACD}),$$

d'où, en ajoutant,

$$(\mathrm{OAB}) + (\mathrm{OBC}) + (\mathrm{OCD}) + (\mathrm{ODA}) \equiv (\mathrm{ABC}) + (\mathrm{ACD}).$$

Plus généralement, A, B, C, ..., K, L *étant des points quelconques de la sphère, la somme*

$$S = (\mathrm{OAB}) + (\mathrm{OBC}) + \ldots + (\mathrm{OKL}) + (\mathrm{OLA})$$

est indépendante du point O, *à un multiple près de* 4π.

Si le polygone sphérique AB ... KLA n'a pas de points doubles, on reconnaît que S n'est autre que l'aire (AB...KLA), à un multiple près de 4π. S'il a des points doubles, on conviendra que l'aire (AB ... KLA), qui n'a pas de signification *a priori*, est par définition la somme S, toujours à $4k\pi$ près.

Prenons maintenant une courbe fermée C quelconque. On peut la considérer comme limite d'un polygone sphérique inscrit AB ... LA dont tous les côtés tendent vers zéro, et la somme S devient à la limite une certaine intégrale prise le long de C. Le point O peut toujours être quelconque, sous la réserve qu'il n'appartienne ni à C ni à l'antipode de C, de telle manière que si un point M décrit C, les longueurs de l'arc OM, qui se déduisent par continuité les unes des autres, soient toujours comprises entre o et π, bornes exclues. M et M′ étant deux points de C infiniment voisins, l'élément de l'intégrale, qui est l'aire du triangle OMM′, a pour valeur en grandeur et en signe, d'après une formule connue,

$$(1 - \cos \mathrm{OM})\, d\theta$$

en désignant par $d\theta$ l'angle $\widehat{\mathrm{MOM}'}$ affecté d'un signe. Ainsi, par définition, on a

$$(\mathrm{C}) = \int_{\mathrm{C}} (1 - \cos \mathrm{OM})\, d\theta \quad (^1). \tag{2}$$

5. *Autre expression de l'aire.* — Considérons d'abord une courbe fermée orientée C sans points doubles (*fig.* 1). *Je vais établir la formule*

$$(\mathrm{C}) = 2\pi - \int_{\mathrm{C}} d\varphi, \tag{3}$$

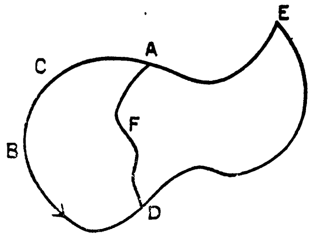
---

(1) Comme exercice, on peut chercher à démontrer directement que l'intégrale curviligne qui forme le second membre de (2) est indépendante du point O, à $4k\pi$ près.

$d\varphi$ étant l'angle de contingence en un point de la courbe.

Si la courbe C n'a ni points anguleux ni points de rebroussement, l'intégrale qui figure dans le second

Fig. 1.



membre de (3) ne donne lieu à aucun commentaire. S'il existe un point anguleux tel que E, on peut d'abord *l'émousser*, c'est-à-dire raccorder les arcs DE et EA par une très petite courbe *n'introduisant pas de point double*. A la limite, on voit que ce point double fait intervenir dans l'intégrale le terme $\widehat{DE, EA}$, en désignant ainsi l'angle compris entre $-\pi$ et $+\pi$ dont il faut faire tourner autour de point E le grand cercle tangent à DE pour l'amener à coïncider avec le grand cercle tangent à EA, ces deux grands cercles étant orientés comme les arcs correspondants. De même, un point de rebroussement fait intervenir un angle égal à $+\pi$ ou à $-\pi$, le recours à l'émoussement préalable ne laissant aucun doute sur le signe qu'il faut prendre.

Posons provisoirement

$$[C] = 2\pi - \int_C d\varphi.$$

Il faut montrer qu'on a

$$[C] \equiv (C). \tag{4}$$

Tout d'abord, joignons deux points A et D de C par un arc AFD, contenu tout entier dans la région à gauche de C et n'ayant pas de points doubles. Je dis qu'on a

$$(5) \qquad [\mathrm{ABDEA}] = [\mathrm{ABDFA}] + [\mathrm{AFDEA}]$$

On a en effet par définition

$$[\mathrm{ABDFA}] = 2\pi - \int_{\mathrm{ABDFA}} d\varphi.$$

Mais, d'après la remarque relative aux points anguleux,

$$\int_{\mathrm{ABDFA}} d\varphi = \int_{\mathrm{ABD}} d\varphi + \int_{\mathrm{DFA}} d\varphi + \widehat{\mathrm{BD}, \mathrm{DF}} + \widehat{\mathrm{FA}, \mathrm{AB}}.$$

Donc

$$[\mathrm{ABDFA}] = 2\pi - \int_{\mathrm{ABD}} d\varphi - \int_{\mathrm{DFA}} d\varphi - \widehat{\mathrm{BD}, \mathrm{DF}} - \widehat{\mathrm{FA}, \mathrm{AB}}.$$

De même

$$[\mathrm{AFDEA}] = 2\pi - \int_{\mathrm{AFD}} d\varphi - \int_{\mathrm{DEA}} d\varphi - \widehat{\mathrm{FD}, \mathrm{DE}} - \widehat{\mathrm{EA}, \mathrm{AF}}.$$

Ajoutant, il vient, en tenant compte des intégrales qui se détruisent,

$$[\mathrm{ABDFA}] + [\mathrm{AFDEA}]$$
$$= 4\pi - \int_{\mathrm{ABDEA}} d\varphi - \left(\widehat{\mathrm{BD}, \mathrm{DF}} + \widehat{\mathrm{FD}, \mathrm{DE}} + \widehat{\mathrm{EA}, \mathrm{AF}} + \widehat{\mathrm{FA}, \mathrm{AB}}\right)$$

Supposons que les points A et D ne soient anguleux ni l'un ni l'autre sur la courbe C (s'ils l'étaient, on les émousserait). Les quatre angles mis entre parenthèses à la fin de la formule précédente sont tous compris entre o et π et sont deux à deux supplémentaires. On a donc

$$[\mathrm{ABDFA}] + [\mathrm{AFDEA}] = 4\pi - \int_{\mathrm{ABDEA}} d\varphi - 2\pi$$
$$= 2\pi - \int_{\mathrm{ABDEA}} d\varphi = [\mathrm{ABDEA}],$$

C. Q. F. D.

La relation (5) s'étend naturellement à la décomposition de la région à gauche de C en un nombre quelconque de régions.

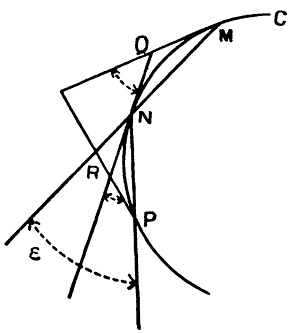
Cela posé, la relation (3) ou (4) est vraie pour un triangle sphérique ABC à gauche, car elle se réduit alors à

$$\begin{aligned}(\mathrm{ABC}) &= 2\pi - (\pi - \hat{A}) - (\pi - \hat{B}) - (\pi - \hat{C}) \\ &= \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} - \pi,\end{aligned}$$

ce qui est une formule classique. On peut donc, par application de la formule (5), étendre la formule (3) à un contour polygonal sphérique quelconque sans points doubles, la région à gauche d'un tel contour pouvant toujours être décomposée en triangles à gauche.

Par un passage à la limite, on étend la formule (3) à une courbe fermée quelconque sans points doubles. Si le lecteur éprouve ici quelque inquiétude, voici (esquissée) la démonstration. Il faut établir que, MNP

Fig. 2.



étant un polygone, ayant pour côtés des arcs de grand cercle, inscrit dans une courbe C (*fig.* 2) [1], la somme

[1] Sur cette figure, les arcs de grand cercle sont représentés par des droites.

des angles extérieurs ε de ce polygone tend vers l'intégrale $\int_C d\varphi$, quand les côtés du polygone tendent vers zéro.

Menons les grands cercles tangents à C en M, N, P. On forme ainsi deux triangles sphériques infiniment petits MNQ, NRP. On a, $\hat{Q}$ étant l'angle infiniment petit de sommet Q,

$$\hat{Q} \sim \widehat{QMN} + \widehat{MNQ},$$

à un infiniment petit du second ordre près, MN étant l'infiniment petit principal, car le triangle MNQ étant infiniment petit, son excès sphérique, égal à son aire, est du second ordre.

D'autre part, si les coordonnées d'un point de C sont des fonctions régulières d'un paramètre, on voit, sans qu'un calcul effectif soit nécessaire, que les rapports

$$\frac{\widehat{QMN}}{MN}, \quad \frac{\widehat{MNQ}}{MN}$$

tendent vers une même limite, quand N tend vers M. Donc le rapport des angles $\widehat{QMN}$, $\widehat{MNQ}$ tend vers l'unité, et l'on peut écrire, toujours en négligeant un infiniment petit d'ordre supérieur,

$$\hat{Q} \sim 2\widehat{MNQ}.$$

De même, $\hat{R}$ étant l'angle infiniment petit de sommet R,

$$\hat{R} \sim 2\widehat{RNP}.$$

Donc

$$\hat{Q} + \hat{R} \sim 2\left(\widehat{MNQ} - \widehat{RNP}\right) = 2\varepsilon.$$

On peut donc écrire

$$\varepsilon = \frac{1}{2}\left(\widehat{Q} + \widehat{R}\right)(1+\theta),$$

θ étant infiniment petit.

Si l'on étend cette égalité à tous les points de C, on a, en ajoutant,

$$\Sigma\varepsilon = (1+\theta')\Sigma\widehat{Q},$$

θ' étant encore infiniment petit (il faut ici invoquer la continuité uniforme). Par conséquent

$$\lim \Sigma\varepsilon = \int_C d\varphi,$$

C. Q. F. D. [1].

6. *Courbe fermée quelconque* — Si maintenant l'on suppose que C est une courbe fermée ayant des points doubles en nombre quelconque m, on a la formule

$$(6) \qquad (C) \equiv 2(1+m)\pi - \int_C d\varphi.$$

Si $m = 0$, la formule (6) est exacte, puisqu'elle se réduit à la formule (3). Il suffit donc d'établir que la formule (6) est vraie, si on la suppose établie pour toutes les courbes ayant moins de m points doubles.

A étant un point double de C (*fig.* 3), décrivons cette courbe en partant de A jusqu'à ce que nous y repassions. Nous décrivons ainsi une première courbe fermée C_1. Continuons le parcours. Nous revenons encore au point A après avoir décrit une nouvelle

---

[1] La formule (3) n'est qu'un cas particulier de la *formule d'Ossian Bonnet*, vraie pour une surface quelconque (*voir* par exemple VESSIOT, *Leçons de Géométrie supérieure*, p. 75).

courbe fermée C_2. On a, en vertu de la définition (2) de (C),

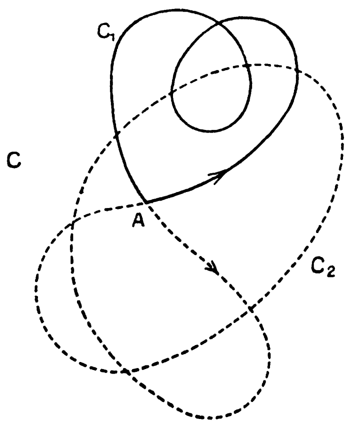
$$(C) \equiv (C_1) + (C_2).$$

Soient m_1 et m_2 les nombres des points doubles de C_1 et de C_2, respectivement. On a

$$m = 1 + m_1 - m_2 + n,$$

n étant le nombre des points doubles de C qui sont les

Fig. 3.



points d'intersection de C_1 et C_2; n est un nombre pair, puisque C_1 et C_2 sont des courbes fermées. Donc

$$m \equiv 1 + m_1 + m_2 \pmod 2.$$

D'autre part, (6) est supposée vraie pour C_1 et pour C_2. Donc

$$(C_1) \equiv 2(1 + m_1)\pi - \int_{C_1} d\varphi,$$

$$(C_2) \equiv 2(1 + m_2)\pi - \int_{C_2} d\varphi,$$

d'où

$$(C) \equiv (C_1) + (C_2) \equiv 2\pi + 2(1 + m_1 + m_2)\pi - \int_{C_1} d\varphi - \int_{C_2} d\varphi$$
$$\equiv 2(1 + m)\pi - \int_{C_1} d\varphi - \int_{C_2} d\varphi.$$

Enfin $\int_{C_1} + \int_{C_2}$ ne diffère de $\int_{C}$ que par la somme des angles introduits dans les deux premières intégrales par le point anguleux A, et la figure montre clairement que cette somme est nulle. La formule (6) est donc établie.

7. *Corollaire.* — On déduit de la formule (6) une conséquence assez curieuse. Portons sur tous les grands cercles tangents à C, à partir des points de contact, et dans le sens qui résulte du sens de parcours de C, des longueurs égales à $\frac{\pi}{2}$. Le lieu des extrémités des quadrants ainsi obtenus est une courbe C_1, dont l'aire est égale à celle de la courbe C, augmentée de l'aire balayée par les quadrants. Or, l'élément de cette dernière est égal à $d\varphi$. On a donc

$$(C_1) \equiv 2(1 + m)\pi - \int_C d\varphi + \int_C d\varphi \equiv 2(1 + m)\pi.$$

Ainsi *l'aire* (C_1) *est égale* (mod 4π) *à* 2π *ou à zéro, suivant que* C *a un nombre pair ou un nombre impair de points doubles.*

Si l'on invoque les propriétés classiques des indicatrices sphériques des courbes gauches, on conclut de là le théorème suivant, dû à Jacobi [1] :

---

[1] *Gesammelte Werke*, t. VII, p. 34. J. Bertrand cite ce théorème dans son *Traité de Calcul différentiel et de calcul intégral*, t. I, p. 744. Ni l'un ni l'autre de ces auteurs n'a regardé la question de près. Ils disent que la courbe C_1 divise l'aire de la sphère en deux parties équivalentes, ce qui n'est pas toujours exact, comme le montrent les développements du présent article.

Par un point O menons des parallèles aux normales principales d'une courbe gauche fermée quelconque. Les traces de ces parallèles sur une sphère de centre O et de rayon égal à l'unité ont pour lieu une courbe fermée C, d'aire égale, soit à 2π, soit à zéro.

8. *Courbes supplémentaires.* — La courbe supplémentaire d'une courbe C est la courbe C′, lieu des pôles des grands cercles tangents à C. Il est bien connu, et d'ailleurs presque évident, que, réciproquement, C est supplémentaire de C′.

Un grand cercle ayant deux pôles, cette définition donnerait deux supplémentaires à C. Pour avoir une courbe unique, voici comment je procéderai :

Soit d'abord un arc régulier AB, décrit dans le sens AB. Son arc supplémentaire A′B′ sera le lieu des pôles à gauche ou à droite des grands cercles tangents orientés comme AB, suivant que cet arc est lui-même à gauche ou à droite.

Prenons maintenant une courbe fermée C, que je suppose, pour simplifier, dépourvue de points anguleux. Elle se compose d'arcs réguliers séparés par des points d'inflexion ou par des points de rebroussement. Les premiers séparent des arcs de sortes différentes et les seconds des arcs de même sorte, puisque nous excluons les rebroussements de seconde espèce.

Les points d'inflexion de C sont nécessairement en nombre pair, puisque, à chacun d'eux, $d\varphi$ change de signe et que $d\varphi$ doit reprendre son signe initial quand le point décrivant C revient au point de départ. Les rebroussements peuvent être en nombre pair ou en nombre impair.

Si l'on construit les arcs supplémentaires des arcs réguliers successifs qui constituent AB, ils forment une suite discontinue, l'origine de chacun d'eux étant l'antipode de l'extrémité de l'arc précédent, que la discontinuité provienne d'un point d'inflexion ou d'un rebroussement de C. Pour obtenir une courbe continue, on peut s'y prendre comme il suit : partant d'un point d'inflexion ou d'un point de rebroussement de C, décrivons le premier arc régulier AB de cette courbe et construisons son supplémentaire A'B' comme il a été indiqué plus haut. Soit BD l'arc régulier qui suit AB. Je remplacerai son supplémentaire par l'arc antipode B'D'. B pouvait être un point d'inflexion ou un point de rebroussement de C. Il est aisé de reconnaître que, suivant le cas, B' est un rebroussement ou un point d'inflexion de A'B'D' ([1]).

En continuant ainsi, on construit un arc A'B'D'..., qui sera fermé, si le nombre des rebroussements est pair, car le nombre des points d'inflexion étant pair aussi, on aura remplacé un point par son antipode un nombre pair de fois, et l'on sera par conséquent revenu au point de départ à la fin de l'opération. Si le nombre des rebroussements de C est impair, on aboutit au point antipode du point A'. Il faut alors, pour obtenir une courbe fermée, décrire *deux fois* la courbe C. Il est toujours permis de supposer que C a un nombre pair de rebroussements, cette courbe pouvant être dans la réalité une même courbe décrite deux fois de suite.

9. *Relation entre l'aire de* C *et la longueur de sa supplémentaire* C'. — Pour éviter des complications, je considérerai, à partir de maintenant, les aires *comme*

([1]) On se rend compte aisément de ces faits en prenant pour AB et BD deux arcs de cercle, dont les supplémentaires sont deux autres arcs de cercle.

définies suivant le module 2π *et non plus* 4π, de manière à éviter la considération des points doubles. AB étant un arc régulier, posons

$$(AB) \equiv -\int_{AB} d\varphi \qquad (\text{mod } 2\pi).$$

Pour une courbe fermée C, composée d'arcs réguliers AB, BD, DE, dépourvue de points anguleux et ayant un nombre pair de rebroussements, on a

$$(7) \quad (C) \equiv (AB) + (BD) + (DE) + \ldots \qquad (\text{mod } 2\pi),$$

car la somme des termes égaux à $\pm\pi$ qui interviennent dans l'expression de (C) et qui proviennent des rebroussements est un multiple de 2π.

L'arc élémentaire de l'arc A'B', supplémentaire de AB, est la distance des pôles de deux grands cercles qui se coupent sous l'angle $d\varphi$. C'est donc $|d\varphi|$, et comme $d\varphi$ ne change pas de signe le long de AB, on a. en désignant par A'B' la longueur, considérée comme essentiellement positive, de l'arc A'B',

$$(AB) \equiv \pm A'B' \qquad (\text{mod } 2\pi)$$

avec le signe +, si AB est à droite, et le signe —, si AB est à gauche.

Considérons maintenant la somme (AB) + (BD), B étant un point de rebroussement ou un point d'inflexion.

1° Si B est un point de rebroussement, B' est un point d'inflexion sur l'arc A'B'D'. AB et BD étant deux arcs de même sorte, on a, avec correspondance de signes,

$$(AB) \equiv \pm A'B', \qquad (BD) \equiv \pm B'D' \qquad (\text{mod } 2\pi),$$

d'où

$$(AB) + (BD) \equiv \pm (A'B' + B'D') \qquad (\text{mod } 2\pi).$$

2° Si B est un point d'inflexion, B' est un point de rebroussement sur l'arc A'B'D'. AB et BD étant deux arcs de sortes opposées, on a, toujours avec correspondance des signes,

$$(AB) \equiv \pm A'B', \qquad (BD) \equiv \mp B'D' \qquad (\text{mod } 2\pi),$$

d'où

$$(AB) + (BD) \equiv \pm (A'B' - B'D') \qquad (\text{mod } 2\pi).$$

En continuant, on parvient à une relation de la forme

$$(8) \qquad \begin{aligned} (C) &\equiv (AB) + (BD) + (DE) \\ &\equiv \pm A'B' \mp B'D' \mp D'E' \mp \ldots \qquad (\text{mod } 2\pi), \end{aligned}$$

où deux termes consécutifs du second membre ont le même signe, s'ils désignent les longueurs de deux arcs séparés par un point d'inflexion, et le signe contraire, si ces arcs sont séparés par un point de rebroussement. Le résultat s'exprime ainsi :

L'aire (C) *de la courbe* C *est congrue, suivant le module* 2π, *à* $\pm$ L', L' *désignant la somme alternée des longueurs des arcs de la courbe supplémentaire* C', *séparés par les points de rebroussement successifs de cette courbe.*

En tenant compte des points doubles de C, on parviendrait à une congruence suivant le module 4π, plus précise que (8), mais plus compliquée.

On voit que *deux courbes fermées, de même longueur totale, ont pour supplémentaires des courbes fermées, de même aire.* Ce théorème n'est vrai qu'*en gros*, et les développements qui précèdent montrent comment il faut le préciser.