

Solution de questions proposées

Nouvelles annales de mathématiques 5^e série, tome 3
(1924), p. 395-396

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1924_5_3__395_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1924, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SOLUTION DE QUESTIONS PROPOSÉES.

2445.

(1920, p. 279, 1922-1923 p. 160.)

Une ellipse étant donnée, il existe pour chaque tangente deux cercles passant par les foyers et tangents à cette droite. Les points de contact des deux cercles avec la droite sont sur les tangentes à la courbe aux sommets du petit axe; les deux cercles se coupent sous un angle constant.

G. F. et R. B.

SOLUTION

Par M. G. ROY.

Soit MM' une tangente à l'ellipse qui rencontre les tangentes à la courbe aux sommets B et B' du petit axe en M et M' respectivement; si K est l'intersection de MM' avec le grand axe, on a

$$(1) \quad \overline{KF} \cdot \overline{KF'} = \overline{KO}^2 - (a^2 - b^2)$$

et

$$\begin{aligned} \overline{MM'}^2 &= 4b^2 + (\overline{BM} - \overline{B'M'})^2 \\ &= 4b^2 + (\overline{BM} + \overline{B'M'})^2 - 4\overline{BM} \cdot \overline{B'M'} \\ &= 4b^2 + \overline{KO}^2 - 4a^2; \end{aligned}$$

d'où

$$(2) \quad \overline{KM}^2 = \overline{KM'}^2 = \overline{KO}^2 - (a^2 - b^2).$$

Les relations (1) et (2) montrent que les cercles $FF'M$ et $FF'M'$ sont tangents à MM' .

Si ω et ω' sont les centres de ces cercles et ρ et ρ' les rayons, on a en considérant les triangles semblables ωBM et $M'mM$ (m pied de la perpendiculaire abaissée de M sur la tangente

en B'), $\omega' B' M'$ et $M' m M$,

$$\rho = BM \cdot \frac{MM'}{2b}, \quad \rho' = B' M' \cdot \frac{MM'}{2b},$$

et

$$\overline{B\omega} = \overline{BM} \cdot \frac{\overline{BM} - \overline{B'M'}}{\overline{B'B}}, \quad \overline{B'\omega'} = \overline{B'M'} \cdot \frac{\overline{BM} - \overline{B'M'}}{\overline{B'B}},$$

les deux dernières relations donnent

$$\overline{\omega'\omega} = \frac{\overline{MM'}^2}{\overline{B'B}}.$$

Si V est l'angle sous lequel se coupent les deux cercles

$$\overline{\omega'\omega}^2 = \rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos V$$

ou

$$\begin{aligned} \frac{\overline{MM'}^4}{4b^2} &= \frac{\overline{MM'}^2}{4b^2} (\overline{BM}^2 + \overline{B'M'}^2) - 2 \frac{\overline{MM'}^2}{4b^2} \overline{BM} \cdot \overline{B'M'} \cos V \\ &= \frac{\overline{MM'}^2}{4b^2} (\overline{MM'}^2 - 4b^2) + \frac{a^2}{4b^2} \overline{MM'}^2 (1 - \cos V), \\ \cos V &= \frac{a^2 - 2b^2}{a^2}. \end{aligned}$$

Si $a = b\sqrt{5}$ les deux cercles sont orthogonaux.

REMARQUE AU SUJET DE LA QUESTION 2352 (1924-1925, p. 196).

La propriété qui fait l'objet de cette question est un cas particulier de la suivante :

Si deux surfaces réglées Σ et Σ' sont coupées par deux plans parallèles P et P' de telle façon que les sections soient respectivement équivalentes et si de plus les sections de Σ et Σ' par le plan π équidistant de P et P' sont équivalents, les volumes V et V' limités par Σ , P et P' d'une part, Σ' , P et P' d'autre part sont équivalents.

Cette proposition est une conséquence immédiate de la formule de Sarrus.

L'ellipsoïde étant une surface réglée, le théorème ci-dessus lui est applicable. On peut d'ailleurs remplacer dans l'énoncé de la question 2352, AA' , BB' et CC' par trois diamètres conjugués de l'ellipsoïde.

G. ROY.