A. BUHL

Sur quelques équations non linéaires aux dérivées partielles du premier ordre

Nouvelles annales de mathématiques 5e série, tome 3 (1924), p. 365-376

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1924_5_3__365_1>

SUR QUELQUES ÉQUATIONS NON LINÉAIRES AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU PREMIER ORDRE;

PAR A. BUHL.

J'examine ci après quelques problèmes *à énoncés géométriques* qui entraînent des équations *non*

(1) *Journal de Math.*, 1883; *Acta math.*, 1884.

linéaires aux dérivées partielles du premier ordre. Il n'est pas absolument aisé de trouver de tels problèmes si l'on veut qu'ils soient explicitement accessibles à la méthode d'intégration, au moins jusqu'à l'obtention de l'intégrale complète. Et ce n'est que dans ce cas qu'ils ont une valeur pédagogique, qu'on peut les proposer aux élèves comme exercices ou comme problèmes d'examen.

Les exemples qui suivent ont justement servi à illustrer mon Cours d'Analyse de la Faculté des Sciences de Toulouse. Ils n'ont évidemment point de hautes prétentions mais peuvent, il me semble, avoir celle de s'ajouter naturellement à des Recueils d'Exercices tels que ceux de Frenet ou de Tisserand.

Les dernières questions nous ramènent à des sujets déjà traités dans les *Nouvelles Annales* (octobre 1923, juin 1924) par l'auteur et par M. Vincensini (janvier 1925). Il s'agit de volumes tournants proportionnels à l'aire d'une cloison génératrice.

1. *Généralités.* — Rappelons, sans démonstration, que l'intégration de l'équation

$$F(x, y, z, p, q) = 0 \tag{1}$$

repose sur la considération du système

$$\frac{dx}{F_p} = \frac{dy}{F_q} = \frac{-dp}{F_x + pF_z} = \frac{-dq}{F_y + qF_z} \tag{2}$$

dont il convient de trouver *une* intégrale

$$\Phi(x, y, z, p, q) = a. \tag{3}$$

De (1) et (3) on peut alors tirer p et q et former

$$dz = p\,dx + q\,dy. \tag{4}$$

C'est là une équation aux différentielles totales toujours intégrable car le système (2) a précisément été formé pour exprimer son intégrabilité. L'intégration de (4) introduit une nouvelle constante arbitraire b, d'où, pour (1), *l'intégrale complète*

$$\varphi(x, y, z;\, a, b) = 0. \tag{5}$$

L'enveloppe à deux paramètres, a, b, de cette famille de surfaces est *l'intégrale singulière* de (1); l'enveloppe, à un seul paramètre $b = \psi(a)$ est *l'intégrale générale*, laquelle dépend de la fonction arbitraire $\psi(a)$.

L'intégrale complète (5) possède, à la fois, les propriétés géométriques traduites par les équations (1) et (3). Ainsi, pour les équations

$$F(z, p, q) = 0, \tag{6}$$

le système (2) donne immédiatement l'intégrale

$$\alpha p + \beta q = 0. \tag{7}$$

Celle-ci représente des cylindres à génératrices parallèles à la direction α, β, 0. Une intégrale complète d'une équation (6) est donc ainsi constituée par une certaine famille de cylindres.

Rappelons encore qu'une intégrale complète peut souvent être obtenue sans passer par toute l'analyse précédente. Ainsi, pour l'équation des surfaces développables,

$$F(p, q) = 0, \tag{8}$$

on a

$$z = ax + by + c$$

avec a et b liés par $F(a, b) = 0$.

De même, à l'équation

$$F(x, p) + G(x, q) = 0, \tag{9}$$

on fait immédiatement correspondre une intégrale complète en posant

$$F(x, p) = a, \qquad G(x, q) = -a.$$

2. *Notations géométriques.* — Soit M un point d'une surface S rapportée à trois axes rectangulaires $Oxyz$. En M, nous considérerons une normale MN, à S, perçant Oxy en N. La projection de M sur Oxy sera P. Dans le plan MNP, nous considérerons aussi une tangente MT, à S, laquelle percera Oxy en T. On aura

$$\text{(10)} \qquad \text{NP} = z\sqrt{p^2 + q^2}, \qquad \text{PT} = \frac{z}{\sqrt{p^2 + q^2}}.$$

Ces formules généralisent les notions de sous-normale et de sous-tangente relatives aux courbes planes.

3. *Surfaces telles que le rectangle de diagonale* PN *et de côtés respectivement parallèles à* Ox *et* Oy *ait une aire constante* k^2. — Le point N ayant pour coordonnées $x + pz$ et $y + qz$, on a immédiatement, pour l'équation aux dérivées partielles des surfaces en question,

$$\text{(11)} \qquad pqz^2 = k^2.$$

Cette équation est du type (6). L'intégrale complète est

$$z^2 = 2k\left(ax + \frac{y}{a}\right) + b.$$

L'intégrale générale dépend de l'élimination de a entre les deux équations

$$z^2 = 2k\left(ax + \frac{y}{a}\right) + \psi(a),$$

$$0 = 2k\left(x - \frac{y}{a^2}\right) + \psi'(a).$$

Pour $\psi(a)$ polynome, on pourrait certainement avoir une riche moisson de surfaces algébriques jouissant de la propriété indiquée. Pour $\psi(a) = C^2$, on a ainsi

$$(z^2 - C^2)^2 = 16k^2xy.$$

On peut aussi étudier (11) en posant $u = z^2$, ce qui ramène l'équation à la forme

$$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} = 4k^2 \quad \text{ou} \quad pq = 4k^2.$$

On est alors ramené à l'étude de surfaces développables.

4. *Surfaces telles que le rectangle de diagonale* PN, *déjà considéré, ait même aire que le rectangle analogue de diagonale* OP. — L'équation aux dérivées partielles est

$$(12) \qquad pqz^2 = xy.$$

Ici il est encore indiqué de poser $u = z^2$, ce qui ramène l'équation à la forme

$$(13) \qquad pq - 4xy = 0.$$

Pour cette dernière le système (2) est

$$\frac{dx}{q} = \frac{dy}{p} = \frac{dp}{4y} = \frac{dq}{4x}$$

et donne, entre autres combinaisons possibles,

$$4x^2 - q^2 = a,$$

d'où, en tenant compte de (13),

$$p = \frac{4xy}{\sqrt{4x^2 - a}}, \qquad q = \sqrt{4x^2 - a}.$$

Formant (4), on a immédiatement

$$u = z^2 = y\sqrt{4x^2 - a} + b$$

et ceci est bien une intégrale complète de (13), mais nous sommes précisément dans un cas qui permet de montrer que le hasard des combinaisons intégrables, dans un système (2), vaut souvent moins que quelque méthode plus particulière mais intuitivement adaptée à l'équation à intégrer. Ainsi (13) peut s'écrire

$$\frac{p}{2x} = \frac{2y}{q},$$

ce qui est du type (9). Soit a la valeur commune de ces rapports; on a immédiatement

$$u = z^2 = ax^2 + \frac{y^2}{a} + b$$

et ceci est bien encore une intégrale complète mais beaucoup plus maniable que celle trouvée d'abord. Pour avoir l'intégrale générale de (12), il reste à éliminer a entre les deux équations

$$z^2 = ax^2 + \frac{y^2}{a} + \psi(a),$$

$$0 = x^2 - \frac{y^2}{a^2} + \psi'(a).$$

Là encore, pour $\psi(a)$ polynome, de nombreuses surfaces algébriques peuvent être obtenues. Ainsi, pour $\psi(a) = C$, on a

$$z^2 = 2xy + C.$$

Pour $\psi(a) = a + C$, on a

$$(z^2 - C)^2 = 4y^2(x^2 + 1).$$

Remarquons au moins les quadriques dont l'énoncé donne une propriété simple.

5. *Surfaces telles que* $\overline{NP} = \mu . \overline{OP}$ *si* μ *est un facteur constant.* — On a immédiatement

$$z^2(p^2 + q^2) = \mu^2(x^2 + y^2).$$

Il est encore indiqué de poser $u = z^2$, ce qui ramène l'équation à la forme

$$p^2 + q^2 = 4\mu^2(x^2 + y^2).$$

Celle-ci est encore du type (9) et il suffit de poser

$$p^2 - 4\mu^2 x^2 = 4\mu^2 y^2 - q^2 = 4a^2\mu^2$$

pour avoir l'intégrale complète

$$\frac{u}{2\mu} = \frac{z^2}{2\mu} = \int \sqrt{x^2 + a^2}\, dx + \int \sqrt{y^2 - a^2}\, dy + b.$$

Les quadratures sont faciles mais peu maniables.

Ce problème conduit à des réflexions opposées à celles du paragraphe précédent.

Ici l'intégrale complète a été trouvée très simplement mais il ne s'ensuit pas qu'elle soit très simple.

Si, pour l'équation du présent paragraphe, on forme le système (2), des combinaisons simples conduisent à l'intégrale complète

$$\frac{z^2}{\mu} = (x^2 - y^2)\sin\alpha + 2xy\cos\alpha + \beta$$

beaucoup plus maniable, beaucoup plus aisée, à étudier, au point de vue géométrique, que celle déjà obtenue.

On voit qu'on ne peut pas se considérer comme pleinement satisfait lorsque, *par une seule méthode*, on a obtenu une première intégrale complète d'une équation (1); reste à savoir si une seconde, plus avantageuse, ne serait pas engendrée par une autre méthode.

6. *Surfaces définies par une propriété quelconque, mais intrinsèque, du triangle* MNT. — Une telle propriété du triangle MNT peut évidemment toujours se traduire par une relation entre les segments NP et PT exprimés en (10). L'équation aux dérivés partielles des surfaees S en litige sera donc de la forme

$$p^2 + q^2 = \Phi(z). \tag{14}$$

Cette équation exprime aussi que les surfaces S sont coupées par tous les plans parallèles à Oxy sous un angle qui est constant tout le long d'une même section. Ces sections sont donc des lignes de courbures pour la surface. Tout ceci rend le problème abordable de plusieurs manières et n'aboutit qu'à des *moulures* engendrées par une courbe plane quelconque dont le plan roule sur un cylindre quelconque de génératrices parallèles à Oz. Au point de vue géométrique, ceci est élégamment discuté dans les *Leçons sur les applications géométriques de l'Analyse* de Louis Raffy (p. 166). Au point de vue analytique l'équation (14) est du type (6); l'intégrale complète est

$$\int \frac{dz}{\Phi(z)} = x\cos\alpha + y\sin\alpha + \beta.$$

On peut en déduire facilement les propriétés géométriques indiquées. Un cas particulièrement important est celui où $\Phi(z)$ se réduit à une simple constante; on a alors la surface dont le plan tangent fait un angle constant avec un plan fixe qui est ici le plan Oxy. C'est l'hélicoïde développable, lieu des tangentes à une hélice tracée sur un cylindre *quelconque* de génératrices parallèles à Oz.

7. *Surfaces telles que la plus courte distance de*

la normale et d'une droite fixe soit fonction donnée de l'angle de ces droites. — Prenons la droite fixe pour axe Oz; l'équation aux dérivées partielles des surfaces demandées est

$$(15) \qquad py - qx = f(p^2 + q^2).$$

Les deux derniers membres du système (2) donnent

$$(16) \qquad p^2 + q^2 = \text{const.} = \tan g^2 \varepsilon.$$

Nous aurons donc une intégrale complète constituée par des hélicoïdes développables dont le cylindre de base Γ aura ses génératrices parallèles à Oz. Mais la normale à un tel hélicoïde est tangente à Γ et sa distance à Oz

$$\frac{py - qx}{\sqrt{p^2 + q^2}} = \frac{f(\tan g^2 \varepsilon)}{\tan g \varepsilon} = \frac{\eta}{\tan g \varepsilon} = \mathrm{R}$$

est une certaine constante. Le cylindre base Γ est donc un cylindre circulaire, d'axe Oz et de rayon

$$\mathrm{R} = \eta \cot \varepsilon.$$

Le calcul confirme aisément tout ceci. De (15) et (16) on tire p et q, on forme dz, d'où, en coordonnées semi-polaires et par une intégration immédiate,

$$(17) \qquad \frac{z}{\eta} = \mathrm{C} - \theta + \int \sqrt{\frac{\tan g^2 \varepsilon}{\eta^2} r^2 - 1}\, \frac{dr}{r}.$$

C'est bien là un hélicoïde, de *pas réduit* η. Il faut montrer que ses sections, par des plans de cote z constante, sont des développantes de cercle toutes égales entre elles.

Soit MT une tangente à un cercle de rayon OA. Le point M est censé décrire la développante, le segment MT étant égal à l'arc AT. La tangente en M à la développante fait avec le rayon vecteur OM un angle V égal à l'angle MOT, si bien que l'équation

$$r \cos V = R \qquad \text{ou} \qquad d\theta = \sqrt{\frac{r^2}{R^2} - 1}\,\frac{dr}{r}$$

d'après

$$\operatorname{tang} V = \frac{r}{r'}$$

doit définir les développantes en question; c'est ainsi qu'on les reconnaît dans (17).

Quant à passer de l'intégrale complète (17) à l'intégrale générale de (15), ce sera, le plus souvent, impraticable. Il faudrait, dans (17), remplacer η par $f(\operatorname{tang}^2 \varepsilon)$, puis C par une fonction arbitraire de ε, soit $C(\varepsilon)$, puis chercher l'enveloppe, pour ε variable, de la famille d'hélicoïdes développables ainsi constituée. Dans (17), l'intégration en r est facile mais complique plutôt l'aspect des choses. Malgré ces difficultés, nous allons examiner deux équations (15) particulières comme répondant, tout au moins, à des problèmes à énoncés remarquables.

8. *Surfaces dont la normale touche un cylindre de révolution.* — C'est là un problème bien connu mais qui doit être brièvement rappelé comme étant l'un des plus simples donnant lieu à une équation du type (15). On a alors, R étant le rayon *constant* du cylindre,

$$f(p^2 + q^2) = R\sqrt{p^2 + q^2}, \qquad \eta = f(\operatorname{tang}^2 \varepsilon) = R \operatorname{tang} \varepsilon.$$

L'intégrale complète (17) devient

$$z = R \operatorname{tang} \varepsilon \left(C - \theta + \int \sqrt{\frac{r^2}{R^2} - 1}\,\frac{dr}{r} \right).$$

Ici l'enveloppe, avec $C(\varepsilon)$ pour C, se compose de développantes de cercles analogues à celles de l'intégrale complète. Ceci tient à ce que l'intégrale générale donne toujours des moulures dont le cylindre base est le cylindre de révolution donné; c'est là le fait qui était connu d'avance ou bien facile à prévoir.

9. *Surfaces sur lesquelles on peut détacher des cloisons d'aire* S, *à contour quelconque, donnant, avec* Oz *comme axe de rotation, des volumes tournants* V *tels que* $V = aS$. — L'équation du problème est

$$(18) \qquad \begin{aligned} V &= 2\pi \int\int_S (py - qx)\,dx\,dy \\ &= a \int\int_S \sqrt{1 + p^2 + q^2}\,dx\,dy. \end{aligned}$$

Bien que l'expression de V soit aisée à obtenir, on peut se reporter, à cet égard, à mon opuscule *Géométrie et Analyse des Intégrales doubles* (p. 25). Comme l'équation intégrale (18) doit être vraie quelle que soit la cloison S, elle donne l'équation aux dérivées partielles

$$(19) \qquad py - qx = \frac{a}{2\pi}\sqrt{1 + p^2 + q^2}$$

qui est encore du type (15). On a

$$\eta = f(\text{tang}^2 \varepsilon) = \frac{a}{2\pi \cos\varepsilon}, \qquad R = \eta \cot \varepsilon = \frac{a}{2\pi \sin\varepsilon};$$

d'où

$$(20) \qquad a = \frac{2\pi\eta R}{\sqrt{\eta^2 + R^2}}.$$

L'intégrale complète (17) devient ici

$$(21) \qquad 2\pi z \cos\varepsilon = a(C - \theta) + \int \sqrt{4\pi^2 r^2 \sin^2\varepsilon - a^2}\,\frac{dr}{r}.$$

Le pas réduit η étant appelé h, cet hélicoïde développable est celui que donne M. P. Vincensini dans un récent et intéressant article *Sur une propriété de la développante du cercle et de l'hélicoïde développable* (*N. A.*, janvier 1925). La formule (20) est de M. Vincensini. *Théoriquement*, les surfaces S comprennent non seulement les hélicoïdes (21) mais toutes leurs enveloppes pour ε variable et C remplacé par C(ε). Ces surfaces S forment une famille dépendant d'une fonction arbitraire. Mais *pratiquement* de telles enveloppes ne semblent pas aisées à expliciter et le résultat de M. Vincensini gagne en importance comme étant, quoique très particulier, le seul peut-être qu'on puisse facilement se représenter au point de vue géométrique.