NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

P. PAPILLON

Sur les volumes tournants

Nouvelles annales de mathématiques 5e série, tome 3 (1924), p. 348-354

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1924_5_3__348_0>

SUR LES VOLUMES TOURNANTS ;

Par P. PAPILLON.

1. Aux nombreuses propriétés concernant les hélicoïdes, et dont Mannheim a énoncé un grand nombre au début de ses *Principes et développements de Géométrie cinématique*, il convient de joindre la suivante :

Les contours fermés tracés sur l'hélicoïde central relatif à deux vecteurs donnent, en tournant autour de ceux-ci, des volumes de révolution en rapport constant.

Telle est la conclusion à laquelle est parvenu M. A. Buhl dans un article récemment paru ici-même (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, 5[e] série, t. II, juin-juillet 1924). Les lignes qui suivent ont pour objet la généralisation de cette propriété des hélicoïdes, des surfaces de révolution en particulier, propriété qui, il n'est pas inutile de le noter, ne dépend toujours que d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre, linéaire.

2. *Position du problème.* — Considérons k axes

$$D_1, \quad D_2, \quad \ldots, \quad D_i, \quad \ldots, \quad D_k,$$

arbitrairement distribués dans l'espace, et soient

$$V_1, \quad V_2, \quad \ldots, \quad V_i, \quad \ldots, \quad V_k$$

les volumes de révolution engendrés par la rotation d'un contour fermé (C) autour de ces axes, respectivement; soit enfin J l'aire limitée à la projection du contour sur un plan donné (P).

Nous nous proposons de rechercher toutes les surfaces (S) sur lesquelles on peut tracer des contours (C) tels que l'on ait

$$(1)\qquad m_1 V_1 + m_2 V_2 + \ldots + m_i V_i + \ldots + m_k V_k = n.J,$$

les coefficients

$$m_1,\quad m_2,\quad \ldots,\quad m_i,\quad \ldots,\quad m_k,\quad n$$

étant des constantes données.

Pour former l'équation du problème, nous rapporterons l'espace à trois axes rectangulaires Ox, Oy, Oz, le plan xOy coïncidant avec le plan donné (P), en sorte que

$$J = \int\int_S dx\, dy.$$

Tout axe D_i sera déterminé par l'un quelconque de ses points $A_i(a_i, b_i, c_i)$ et par ses paramètres directeurs λ_i, μ_i, ν_i. Rappelons alors l'expression générale du volume tournant engendré par une cloison (*voir* A. Buhl, *Géométrie et Analyse des Intégrales doubles*, p. 24-25)

$$V = 2\pi \int\int_S \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \lambda & \mu & \nu \\ x-a & y-b & z-c \end{vmatrix} d\sigma,$$

qui s'écrit encore, en mettant en évidence les coefficients $-p$, $-q$, $+1$, de la normale à (S),

$$V = 2\pi \int\int_S \begin{vmatrix} -p & -q & +1 \\ \lambda & \mu & \nu \\ x-a & y-b & z-c \end{vmatrix} dx\, dy.$$

L'équation du problème, qui définit les surfaces (S), s'écrit

$$(2)\qquad \sum_{i=1}^{i=k} m_i \begin{vmatrix} -p & -q & +1 \\ \lambda_i & \mu_i & \nu_i \\ x-a_i & y-b_i & z-c_i \end{vmatrix} = \frac{n}{2\pi},$$

la sommation s'étendant aux k axes précédemment considérés. Si nous posons

$$(3)\qquad \left\{ \begin{aligned} P &= \sum_{i=1}^{i=k} m_i \lambda_i, \\ Q &= \Sigma m_i \mu_i, \\ R &= \Sigma m_i \nu_i, \\ L &= \Sigma m_i(\nu_i b_i - \mu_i c_i), \\ M &= \Sigma m_i(\lambda_i c_i - \nu_i a_i), \\ N &= \Sigma m_i(\mu_i a_i - \lambda_i b_i) - \frac{n}{2\pi}, \end{aligned} \right.$$

l'équation (2) devient

$$(4)\quad p(L - Ry + Qz) + q(M - Pz + Rx) = N - Qx + Py.$$

3. *Résolution de l'équation* (4). — C'est là une équation aux dérivées partielles du premier ordre, linéaire. Le système à considérer pour l'intégrer est

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= Qz - Ry + L, \\ \frac{dy}{dt} &= Rx - Pz + M, \\ \frac{dz}{dt} &= Py - Qx + N, \end{aligned} \right.$$

t étant une variable auxiliaire.

Nous n'insisterons pas sur la classique résolution de ce système; on se reportera, par exemple, au Traité d'*Analyse infinitésimale* de Rouché et Lévy, t. II,

p. 652 et suiv.). On trouve ainsi, sans grande difficulté,

$$(4)\quad \begin{cases} Px + Qy + Rz = (PL + QM + RN)t + \alpha, \\ R(PL + QM) - F^2(Py - Qx) - (P^2 + Q^2)N = \beta \cos F.t, \\ F(QL - PM) - FR(Px + Qy) + F(P^2 + Q^2)z = -\beta \sin F.t, \end{cases}$$

avec

$$F^2 = P^2 + Q^2 + R^2,$$

α et β étant des constantes arbitraires.

On en déduit, afin d'obtenir l'équation finie des surfaces (S),

$$\beta^2 = A^2 + B^2,$$

— A et B désignant respectivement, et pour abréger l'écriture, les premiers membres des deux dernières équations (4) — et

$$F.t = \text{Arc}\cos\frac{A}{\beta}$$

qui peut prendre la forme équivalente

$$(5)\qquad t = \frac{1}{F}\,\text{Arc tang}\,\frac{B}{A}.$$

En tenant alors compte de la première (4) et de (5), il vient :

$$Px + Qy + Rz = \frac{PL + QM + RN}{F}\,\text{Arc tang}\,\frac{B}{A} + \alpha,$$

d'où, en liant α et β par une relation arbitraire,

$$(6)\quad \begin{cases} Px + Qy + Rz = \dfrac{PL + QM + RN}{\sqrt{(P^2 + Q^2 + R^2)}}\,\text{Arc tang}\,\dfrac{B}{A} + f(A^2 + B^2), \\ \text{avec} \\ A \equiv R(PL + QM) - (P^2 + Q^2 + R^2)(Py - Qx) - (P^2 + Q^2)N, \\ B \equiv \sqrt{P^2 + Q^2 + R^2}(QL - PM) - R(Px + Qy) + (P^2 + Q^2)z. \end{cases}$$

Telle est l'équation des surfaces (S).

4. *Interprétation géométrique de* (6). — Sous cette forme, la définition géométrique des surfaces (S) n'apparaît pas très clairement; mais effectuons le changement de coordonnées indiqué par la substitution orthogonale suivante :

$$\left\{\begin{aligned}
X &= \frac{Py - Qx}{\sqrt{P^2+Q^2}} + \frac{(P^2+Q^2)N - R(PL+QM)}{(P^2+Q^2+R^2)\sqrt{P^2+Q^2}},\\
Y &= \frac{Px+Qy+Rz}{\sqrt{(P^2+Q^2+R^2)}},\\
Z &= \frac{R(Px+Qy)-(P^2+Q^2)z}{\sqrt{(P^2+Q^2)(P^2+Q^2+R^2)}} - \frac{QL-PM}{P^2+Q^2+R^2},
\end{aligned}\right.$$

sur laquelle se vérifient les six relations fondamentales.

L'équation (6) devient :

$$(7)\qquad Y = \frac{PL+QM+RN}{P^2+Q^2+R^2}\operatorname{Arc\,tang}\frac{Z}{X} + F(X^2+Y^2).$$

Les surfaces (S) *sont donc des hélicoïdes convenablement disposés par rapport aux axes* D.

On retrouve sur (7), ou sur (6), tous les cas particuliers indiqués dans l'article déjà mentionné, et jusqu'au plus simple d'entre eux, proposé au Certificat de Calcul différentiel et intégral à Toulouse (juillet 1923).

On remarquera enfin que si

$$(8)\qquad PL+QM+RN = 0,$$

les hélicoïdes se réduisent à des surfaces de révolution.

Revenons au cas général; les hélicoïdes (S) admettent pour axe la droite

$$Z = 0,\qquad X = 0,$$

soit, dans l'ancien système de coordonnées,

$$(9)\qquad \left\{\begin{aligned}
&R(Px+Qy)-(P^2+Q^2)z = QL-PM,\\
&(P^2+Q^2+R^2)(Py-Qx) = R(PL+QM)-(P^2+Q^2)N.
\end{aligned}\right.$$

5. *Cas particulier de $n=0$.* — La relation (1) prend alors la forme plus simple

$$(1') \qquad m_1 V_1 + m_2 V_2 + \ldots + m_i V_i + \ldots + m_k V_k = 0.$$

Nous allons donner une interprétation cinématique du résultat. Convenons de représenter chaque rotation par un vecteur situé sur l'axe de rotation, et dont la valeur est égale au coefficient m correspondant : ainsi, à la rotation autour de l'axe D_i correspondra le vecteur (V_i) de direction λ_i, μ_i, ν_i, et de valeur algébrique m_i. Dans cette hypothèse,

$$P, \quad Q, \quad R; \quad L, \quad M, \quad N$$

représentent respectivement les composantes, suivant les axes, de la résultante du système des vecteurs (V), et de son moment résultant par rapport à l'origine O.

Théorème. — *L'axe hélicoïdal est axe central pour le système des vecteurs de rotation.*

On vérifie, en effet, simplement que les équations (9) sont en général équivalentes au système

$$\frac{L - Qz + Ry}{P} = \frac{M - Rx + Pz}{Q} = \frac{N - Px + Qy}{R}$$

dans lequel deux équations seulement sont indépendantes, et qui font connaître l'axe central d'un système de vecteurs. Ce raisonnement suppose d'ailleurs, et ceci est ultra-classique,

$$PL + QM + RN \neq 0,$$
$$P^2 + Q^2 + R^2 \neq 0.$$

Signalons enfin que la condition (8) s'interprète aisément :

Les surfaces (S) *sont de révolution lorsque le* *moment résultant est perpendiculaire à la résultante générale, en particulier lorsque l'un de ces deux vecteurs est nul.*

Ainsi, par exemple, *les surfaces* (S) *sont de révolution* si l'on a

$$a_i = b_i = c_i = 0,$$

c'est-à-dire *si les axes de révolution sont concourants:* on peut alors en effet prendre pour origine ce point de concours, auquel cas le moment est nul.

Nous sommes ainsi conduits, par des problèmes de volumes tournants, à tous les théorèmes généraux attachés à l'hélicoïde central d'un système de vecteurs.