RAOUL BRICARD

Sur le mouvement à deux paramètres autour d'un point fixe

Nouvelles annales de mathématiques 5e série, tome 3 (1924), p. 328-341

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1924_5_3__328_0>

[O'8d]

SUR LE MOUVEMENT A DEUX PARAMÈTRES AUTOUR D'UN POINT FIXE;

PAR RAOUL BRICARD.

1. J'ai publié ici-même (¹) une étude sur le mouvement à deux paramètres dans le plan et sur la sphère, et dans une Note des *Comptes rendus* (²) j'ai précisé un résultat obtenu dans la dernière partie du précédent travail. Je vais reprendre la question sous une forme plus developpée.

Quand un solide S possède un point fixe O, sa position dépend de trois paramètres. Si ceux-ci sont fonctions d'une même variable, S est animé d'un mouvement à un paramètre ou *mouvement* M_1, et l'on sait (théorème de Poinsot) que ce mouvement peut être obtenu en liant S à un cône qui roule sur un cône fixe, les deux cônes ayant pour sommet commun le point O. Si les trois paramètres sont fonctions de deux variables indépendantes, on dit, par une extension commode de langage, que S est animé d'un *mouvement à deux paramètres*, ou *mouvement au deuxième degré de liberté*, ou plus brièvement *mouvement* M_2. Le but de cet article est de rechercher si l'on peut énoncer, pour un mouvement M_2 autour d'un point fixe, un théorème analogue à celui de Poinsot sur le mouvement M_1.

(¹) *N. A.*, 1913, p. 302.
(²) *C. R.*, 1ᵉʳ semestre 1918, p. 734.

Au lieu du mouvement de S, on peut considérer celui d'une sphère Σ, de centre O, liée à S et glissant sur une sphère fixe Σ_0. Toute propriété de ce dernier mouvement peut se traduire immédiatement par une propriété du mouvement de S autour de O, et réciproquement. C'est classique. Suivant les cas, il peut être plus avantageux de parler du mouvement de S ou de celui de Σ.

2. Soient $Ox_0y_0z_0$ un trièdre trirectangle fixe, $Oxyz$ trièdre trirectangle lié à S. Soit encore

	O_0x_0	O_0y_0	O_0z_0
Ox	α	β	γ
Oy	α'	β'	γ'
Oz	α''	β''	γ''

le tableau des cosinus directeurs des axes du trièdre mobile. Le mouvement M_2 est défini, si l'on se donne ces cosinus, en fonction de deux variables indépendantes u et v. Ce mouvement M_2 contient une infinité de mouvements M_1. On définira l'un de ceux-ci en se donnant u et v en fonction du temps t.

Prenons S dans une position (u, v) et donnons à ce solide, à partir de cette position, un mouvement M_1 particulier. On sait que ce mouvement est tangent à une rotation dont l'axe a pour équations, par rapport aux axes mobiles,

$$\frac{x}{p} = \frac{y}{q} = \frac{z}{r},$$

p, q, r étant donnés par des formules classiques, dont je récris la première,

$$p = \alpha'' \frac{d\alpha'}{dt} + \beta'' \frac{d\beta'}{dt} + \gamma'' \frac{d\gamma'}{dt}$$

$$= \left(\alpha'' \frac{\partial\alpha'}{\partial u} + \beta'' \frac{\partial\beta'}{\partial u} + \gamma'' \frac{\partial\gamma'}{\partial u}\right) \frac{du}{dt}$$

$$+ \left(\alpha'' \frac{\partial\alpha'}{\partial v} + \beta'' \frac{\partial\beta'}{\partial v} + \gamma'' \frac{\partial\gamma'}{\partial v}\right) \frac{dv}{dt}$$

On peut poser

$$p = P_1 \frac{du}{dt} + Q_1 \frac{dv}{dt},$$

$$q = P_2 \frac{du}{dt} + Q_2 \frac{dv}{dt},$$

$$r = P_3 \frac{du}{dt} + Q_3 \frac{dv}{dt},$$

P_1, Q_1, P_2, Q_2, P_3, Q_3 ne dépendant que de u et de v, c'est-à-dire de la position considérée. Si, partant de cette même position, on fait varier le mouvement M_1, on reconnaît que l'axe de rotation décrit le plan

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ P_1 & Q_1 & R_1 \\ P_2 & Q_2 & R_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Ainsi, *étant donné le mouvement* M_2 *d'un solide* S *autour d'un point* O, *si l'on donne à* S, *en partant d'une même position, tous les mouvements* M_1 *contenus dans* M_2, *le lieu des axes instantanés de rotation est un plan passant par* O. J'appellerai ce plan *le plan des axes*. La perpendiculaire élevée au point O sur le plan des axes sera dite la *droite polaire instantanée* du mouvement M_2.

On voit comment cela se traduit sur la sphère : étant donné un mouvement M_2 sur la sphère et une position (F) de la figure mobile sur cette sphère, on peut donner à la figure, en partant de (F), une infinité de mouvements M_1 contenus dans M_2. Les centres instantanés de rotation correspondants ont pour lieu un grand cercle, *le grand cercle des centres.* Les pôles de ce grand cercle seront dits les *pôles instantanés* du mouvement M_2.

3. Désignons par Σ_0 la sphère fixe, par Σ la sphère qui, entraînée dans le mouvement M_2, glisse sur Σ_0. Marquons sur Σ_0 l'ensemble des pôles instantanés P_0, et sur Σ les points P qui viendront, pour les diverses positions de cette sphère, coïncider avec les pôles correspondants P_0 (pour chaque position, on peut choisir l'un ou l'autre de deux pôles P_0, antipodes l'un de l'autre, mais, le choix une fois fait, le point P correspondant de Σ est déterminé sans ambiguïté).

Les points P_0 couvrent la sphère Σ_0 ou tout au moins une région de cette sphère. De même les points P sur Σ.

Nous avons ainsi défini une certaine correspondance ponctuelle entre Σ_0 et Σ. Proposons-nous d'en rechercher le caractère. On voit que nous procédons comme dans l'étude du mouvement M_1. Pour celui-ci, la considération des centres instantanés de rotation conduit à définir une correspondance entre les points de deux certaines courbes, tracées respectivement sur Σ_0 et sur Σ. Ces deux courbes roulent l'une sur l'autre, en sorte que la correspondance dont il s'agit est *par égalité d'arcs.* Ici, nous reconnaîtrons que *la correspondance entre les points* P_0 *et* P *est une correspondance par égalité d'aires.*

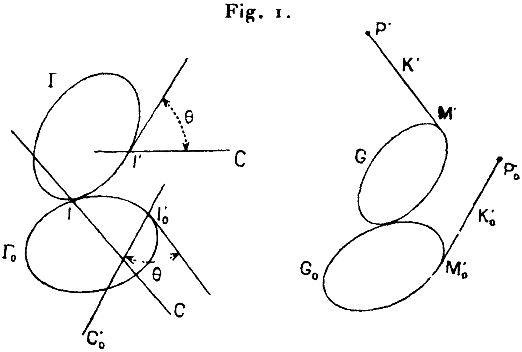
Pour établir cela j'utiliserai certaines propriétés des aires sphériques auxquelles j'ai consacré un article récent ([1]).

([1]) *Sur les axes et les courbes supplémentaires en géométrie*

4. Je donnerai d'abord une démonstration résumée, qui peut suffire au lecteur curieux seulement d'idées générales et indulgent pour le manque de rigueur.

Soit, pour une position donnée de Σ, C le grand cercle des centres (*fig.* 1) [1]. Donnons à Σ, à partir

Fig. 1.



de cette position, un mouvement M_1 *fermé* (c'est-à-dire ramenant Σ à sa position initiale) et contenu dans le mouvement M_2. Ce mouvement s'obtient par le roulement d'une courbe fermée Γ, liée à Σ, sur une courbe fermée Γ_0, liée à Σ_0. Ces deux courbes ont même longueur totale. Elles se touchent en un point I qui appartient à C.

Soit, à un autre instant, I'_0 le point où Γ, en roulant sur Γ_0, sera venue toucher cette dernière courbe. Ce point, marqué sur Γ, est actuellement en I' tel que arc $II' =$ arc II'_0. Le grand cercle des centres C'_0, correspondant à la nouvelle position, passe par I'_0. Traçons le grand cercle C' qui, entraîné dans le roulement de Γ,

---

sphérique (*N. A.*, nov, 1924. p. 41.) J'emploie ici les notations de cet article, auquel je renverrai par l'abréviation (A).

(1) Sur cette figure et sur la suivante, les grands cercles sont représentés par des droites.

vient coïncider avec C'_0. Il passe par le point I' et coupe Γ sous le même angle θ que C'_0 coupe Γ_0.

Cela posé, construisons la figure supplémentaire de la précédente; Γ_0 et Γ ont pour supplémentaires deux courbes fermées G_0 et G *qui ont même aire*, les deux courbes Γ_0 et Γ ayant même longueur totale (A, n° 9). Aux points I'_0 et I' correspondent deux grands cercles K'_0 et K', touchant G_0 et G aux points M'_0 et M' qui sont les pôles des grands cercles tangents à Γ_0 et à Γ aux points I'_0 et I'. Les grands cercles C'_0 et C' ont pour pôles les points P'_0 et P' des grands cercles K'_0 et K', et l'on a

$$\operatorname{arc} M'_0 P'_0 = \operatorname{arc} M' P' = \theta.$$

P'_0 est le pôle instantané du mouvement M_2 de Σ, pour la seconde position considérée, et P' est le point de Σ qui viendra se confondre avec P'_0.

Au cours du mouvement M_1 considéré, P'_0 et P' décrivent deux courbes fermées (P'_0) et (P'). Je dis *qu'elles ont même aire*. En effet l'aire (P') est égale à l'aire de G augmentée de l'aire balayée par l'arc de grand cercle $M'P'$. Cette dernière aire a pour élément, d'après la formule qui donne l'aire d'une calotte sphérique,

$$d\sigma = (1 - \cos M'P')\, d\varphi = (1 - \cos\theta)\, d\varphi,$$

$d\varphi$ étant l'angle de contingence sphérique de G au point M'. De même, l'aire (P'_0) est égale à l'aire de G_0, augmentée de l'aire balayée por $M'_0 P'_0$, qui a pour élément

$$d\sigma_0 = (1 - \cos\theta)\, d\varphi_0,$$

$d\varphi_0$ étant l'angle de contingence de G_0 au point M'_0. Mais les angles de contingence en M'_0 et en M' sont égaux aux arcs élémentaires de Γ_0 et de Γ en I'_0 et en I', et ces arcs sont égaux, puisque Γ roule sur Γ_0. On a donc $d\sigma_0 = d\sigma$. Par conséquent, les aires totales balayées par $M'_0 P'_0$ et par $M'P'$ sont égales, et puisque d'autre part G_0 et O ont la même aire, on a bien

$$\text{aire}(P'_0) = \text{aire}(P'). \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

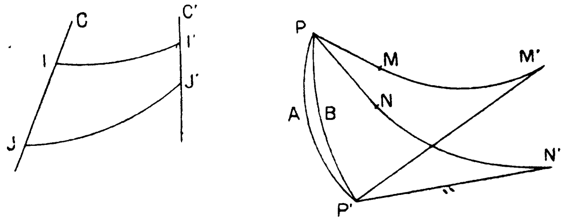
La démonstration précédente ne peut être tenue pour satisfaisante que si l'on est assuré que les courbes Γ_0 et Γ sont *régulières* (A, n° 2), ce qui peut fort bien ne pas être. Si Γ_0 et Γ ont des points d'inflexion ou de rebroussement, l'égalité des aires (G_0) et (G) est remplacée par une congruence. Les aires balayées par K'_0 et par K' restent bien égales, mais il n'est pas certain qu'elles s'ajoutent avec le même signe à (G_0) et à (G), si bien que l'exactitude du résultat reste douteuse. Il faut revoir la question de plus près.

5. Considérons deux positions Σ et Σ' de la sphère mobile (*fig.* 2), et soient C_0 et C'_0 les grands cercles des centres correspondants, tracés sur la sphère fixe. Pour éviter l'introduction d'indices sur la figure, celle-ci est supposée tracée sur la sphère mobile. La figure tracée sur la sphère fixe aurait le même aspect que la première, les diverses lettres de celle-ci étant affectées de l'indice zéro. C et C' sont les grands cercles qui viennent successivement coïncider avec C_0 et avec C'_0.

On peut passer de la première position à la seconde par une infinité de mouvements M_1 contenus dans M_2. Considérons-en deux. Le premier s'obtient en faisant rouler un certain arc de courbe II', tracé sur Σ, sur un arc de courbe $I_0 I'_0$, tracé sur Σ_0. De même le second s'obtient en faisant rouler un arc de courbe JJ' de Σ sur un arc de courbe $J_0 J'_0$ de Σ_0. I et J sont sur le cercle C, I' et J' sur le cercle C'. De même I_0, J_0, I'_0, J'_0, ...

Comme les points singuliers (points de rebroussement, points d'inflexion, points doubles) sont excep-

Fig. 2.



tionnels, on peut supposer les deux positions considérées assez voisines pour que les quatre arcs II', JJ', II'_0, JJ'_0 soient tous *réguliers*. On peut aussi supposer les deux mouvements M_1 introduits assez voisins pour que les deux premiers arcs soient de même sorte, et aussi les deux derniers. Pour fixer les idées, supposons les quatre arcs *à gauche*.

Les deux quadrilatères II'J'J et $I_0I'_0J'_0J_0$ ont leurs côtés deux à deux de même longueur, et leurs angles sont aussi égaux.

Construisons maintenant les figures supplémentaires. Les arcs II' et JJ' ont pour supplémentaires des arcs réguliers MM' et NN'. C et C' ont pour pôles des points P et P' tels que les grands cercles PM et PN soient tangents à MM' et à NN' en M et en N, et que les grands cercles P'M' et P'N' soient tangents aux mêmes arcs en M'et en N'. Le point P pouvait être choisi de deux manières : on fera en sorte qu'il n'y ait pas de rebroussements en M et en N. Le choix du point P' dérive du précédent par continuité, en sorte que M' et N' sont des points de rebroussement.

Quand Σ se rend de la première position à la seconde par le premier mouvement, le point P décrit un arc PAP′; le second mouvement lui fait décrire un arc PBP′.

On a sur la sphère Σ_0 une figure analogue.

Cela posé, on voit d'abord, en raisonnant comme au n° 4, que l'on a les égalités d'aires

$$(\text{PMM}'\text{P}'\text{AP}) = \ldots, \tag{1}$$

$$(\text{PNN}'\text{P}'\text{BP}) = \ldots \tag{2}$$

en ne prenant pas la peine d'écrire les seconds membres, qui ne diffèrent des premiers que par l'indice zéro.

Considérons d'autre part l'aire limitée par le contour PMM′P′N′NP. Elle a pour expression, à $2k\pi$ près (A, n° 6), $-\int d\varphi$, cette intégrale étant prise le long du contour. Les intégrales prises le long des arcs de grands cercles qui font partie de celui-ci sont nulles. Le point de rebroussement M′ donne un terme égal à $-\pi$, et le point de rebroussement N′ un terme égal à $+\pi$. Les points anguleux P et P′ donnent des termes égaux respectivement à $-\widehat{\text{NP}, \text{PM}}$ et à $-\widehat{\text{M}'\text{P}', \text{P}'\text{M}'}$. Donc

$$\begin{aligned}(\text{PMM}'\text{P}'\text{N}'\text{NP}) \equiv -\int_{\text{MM}'} d\varphi - \int_{\text{N}'\text{N}} d\varphi \\ - \widehat{\text{NP}, \text{PM}} - \widehat{\text{M}'\text{P}', \text{P}'\text{N}'} \pmod{2\pi}.\end{aligned}$$

Sur la sphère Σ_0, on a une égalité semblable, les termes du second membre ayant les mêmes valeurs que dans la précédente. Cela est vrai pour les intégrales, à cause des égalités telles que

$$\int_{\text{MM}'} d\varphi = \text{longueur de II}' = \text{longueur de } \text{I}_0\text{I}'_0 = \int_{\text{M}_0\text{M}'_0} d\varphi,$$

et pour les angles, à cause de

$$\widehat{NP, PM} = \pi - \text{longueur IJ} = \ldots.$$

Donc

$$(PMM'P'N'NP) \equiv \ldots \qquad (\text{mod } 2\pi).$$

Si l'on rapproche suffisamment les deux positions de Σ, et si l'on fait aussi les deux mouvements M_1 considérés suffisamment voisins, les deux membres de la relation précédente sont très petits. La congruence se change donc en égalité et l'on a

$$(3) \qquad (PMM'P'N'NP) = \ldots.$$

Écrivons alors les égalités (1), (2) et (3) en mettant l'aire d'un contour C sous la forme qui résulte de sa définition (A, n° 4),

$$(C) \equiv \int (1 - \cos OM)\, d\theta \qquad (\text{mod } 4\pi),$$

O étant un pôle quelconque, M un point décrivant C, $d\theta$ l'angle de deux arcs de grand cercle OM infiniment voisins. On a

$$(4) \qquad (PM) + (MM') + (M'P') + (P'AP) \equiv \ldots,$$

$$(5) \qquad (PN) + (NN') + (N'P') + (P'BP) \equiv \ldots,$$

$$(6) \quad (PM) + (MM') + (M'P') + (P'N') + (N'N) + (NP) \equiv \ldots.$$

En faisant la combinaison $-(4) + (5) + (6)$, on trouve

$$(PAP') + (P'BP) = (PAP'BP) \equiv (P_0 A_0 P'_0 B_0 P_0) \qquad (\text{mod } 4\pi).$$

Mais comme les deux aires sont très petites, la congruence peut être remplacée par une égalité.

Si les arcs II' et JJ' d'une part, $I_0 I'_0$ et $J'J'_0$ avaient été supposés de sortes différentes, on aurait trouvé

$$(PAP'BP) = -(P_0 A_0 P'_0 B_0 P_0).$$

Le théorème du n° 3 est donc complètement démontré.

6. J'indiquerai ici un sujet d'études qui me paraît intéressant : on vient de voir qu'à tout mouvement M_2 autour d'un point fixe on peut attacher une correspondance ponctuelle sur la sphère, qui conserve les aires. *Est-il exact que, réciproquement, toute correspondance de cette nature puisse être rattachée à un certain mouvement* M_2 *autour d'un point fixe?* Je suis porté à le croire, mais je ne sais pas le démontrer.

Le fait supposé vrai, on voit aussi se poser la question suivante : étant donnée la correspondance (P_0, P), il faut, pour réaliser le mouvement M_2, non seulement amener en coïncidence successivement chaque point P avec le point correspondant P_0, mais encore définir à chaque fois l'orientation de la sphère Σ. Il y a donc à rechercher comment cette orientation dépend de la correspondance donnée.

7. Le théorème du n° 3 rend presque intuitif le théorème célèbre de Gauss sur la conservation de la courbure totale dans la déformation d'une surface.

Rappelons d'abord ceci : soient M un point d'une surface S, m le point qui lui correspond par représentation sphérique. Si le point M décrit sur S une courbe fermée d'aire Ω, le point m décrit une courbe fermée d'aire ω, et la courbure totale de S en M est la limite du rapport $\frac{\omega}{\Omega}$.

La démonstration est si brève qu'on peut la donner ici. Il est clair qu'il suffit d'établir la proposition, dans le cas où Ω a pour contour un quadrilatère infiniment petit $MM_1M_2M_3$, ayant pour côtés des lignes de courbure infiniment voisines deux à deux. Alors l'aire ω est limitée par un quadrilatère $m_1m_2m_3m_4$, ayant ses côtés parallèles à ceux du premier.

On a

$$\lim \frac{\omega}{\Omega} = \lim \frac{mm_1}{MM_1} \cdot \frac{m_1m_2}{M_1M_2}.$$

On voit tout de suite que, R et R' étant les deux rayons de courbure principaux de S en M, on a

$$\lim \frac{mm_1}{MM_1} = \frac{1}{R}, \qquad \lim \frac{m_1m_2}{M_1M_2} = \frac{1}{R'},$$

d'où la proposition.

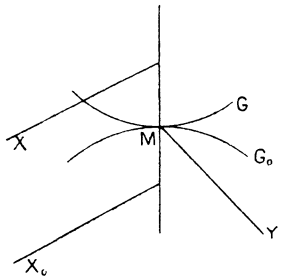
8. Cela posé, soient S_0 et S deux surfaces applicables. Je ne retiens des propriétés de ces surfaces que leur définition, c'est-à-dire le fait qu'il existe entre elles une correspondance ponctuelle conservant les longueurs des arcs. Il en résulte immédiatement que cette correspondance conserve aussi les angles et les aires.

A une géodésique de S_0 correspond une géodésique de S, car la propriété de minimum de longueur se conserve quand on passe de S_0 à S.

S_0 étant supposée fixe, donnons à S un mouvement M_1 tel que chaque point de S vienne successivement coïncider avec le point correspondant de S_0, et cela de telle manière que les courbes tracées sur S et passant par le point considéré soient tangentes aux courbes correspondantes de S_0.

Prenons S dans une position telle que cette surface touche S_0 au point M, et traçons une géodésique G_0 de S_0 passant par le point M (*fig.* 3). Il lui correspond une géodésique G de S. Donnons à S un mouvement M_1, contenu dans le mouvement M_2 défini ci-dessus, tel que le point de contact des deux surfaces décrive G_0. D'après une remarque précédente, ce point

Fig. 3.



de contact décrit G, relativement à S, et G roule sur G_0.

Or on sait [1] que, lorsqu'une courbe G roule sur une courbe G_0, son mouvement est à chaque instant tangent à une rotation dont l'axe passe par le point de contact des deux courbes et est contenu dans le plan qui passe par leur tangente commune et le point de rencontre de leurs axes de courbure au point considéré. Ici, G_0 et G étant des géodésiques respectivement de S_0 et de S, leurs plans osculateurs sont confondus en un même plan qui contient la normale MN, commune à S_0 et à S en M. Donc leurs axes de courbure X et X_0 sont parallèles, leur direction commune étant parallèle au plan tangent en M. Donc enfin *l'axe* Y *de la rotation tangente à* M_1 *est une droite de ce plan tangent*. Il décrit ce plan, quand on fait varier les géodésiques G_0 et G.

---

[1] *N. A.*, 1922, p. 58.

Considérons alors *l'image sphérique* du mouvement M_2 de S, c'est-à-dire le mouvement M_2 d'une sphère Σ de rayon 1, de centre O fixe, et telle que les directions liées à cette sphère soient constamment parallèles aux directions liées à S. Σ glisse sur une sphère fixe Σ_0. Tous les mouvements M_1 de cette sphère sont tangents à des rotations dont les axes sont parallèles à ceux des rotations tangentes aux mouvements correspondants de S, car on passe d'un mouvement à l'autre par une translation qui n'altère pas les directions des axes de rotation. On voit donc que, pour la position considérée, le grand cercle des centres de Σ est parallèle au plan tangent en M à S et à S_0, et que le pôle du mouvement est à l'extrémité d'un rayon parallèle à la normale MN.

Pour un mouvement *fermé* (c'est-à-dire ramenant le solide mobile à sa position initiale) infiniment petit, le point M décrit sur S_0 une courbe enfermant l'aire infiniment petite Ω_0 et le point m décrit sur Σ_0 une courbe enfermant l'aire infiniment petite ω_0. On a, R_0 et R'_0 étant les rayons de courbure principaux de S_0,

$$\frac{1}{R_0 R'_0} = \frac{\omega_0}{\Omega_0}.$$

Si l'on considère le *mouvement réciproque*, c'est-à-dire celui de S_0 par rapport à S, on a, avec des notations analogues,

$$\frac{1}{RR'} = \frac{\omega}{\Omega}.$$

Mais $\Omega_0 = \Omega$, puisque les surfaces sont applicables, et $\omega_0 = \omega$, d'après le théorème du n° 3. Donc

$$\frac{1}{R_0 R'_0} = \frac{1}{RR'}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$