RAOUL BRICARD

Démonstration élémentaires de propriétés fondamentales du tore

Nouvelles annales de mathématiques 5e série, tome 3 (1924), p. 308-313

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1924_5_3__308_1>

[M^{2}4iδ]

DÉMONSTRATIONS ÉLÉMENTAIRES DE PROPRIÉTÉS FONDAMENTALES DU TORE;

Par Raoul BRICARD.

1. Le tore jouit des propriétés suivantes :

I. Théorème de Villarceau. — *Tout plan bitangent au tore le coupe suivant deux cercles* (cercles de Villarceau).

II. Théorème de Schoelcher [1]. — *Les cercles de Villarceau coupent sous le même angle tous les*

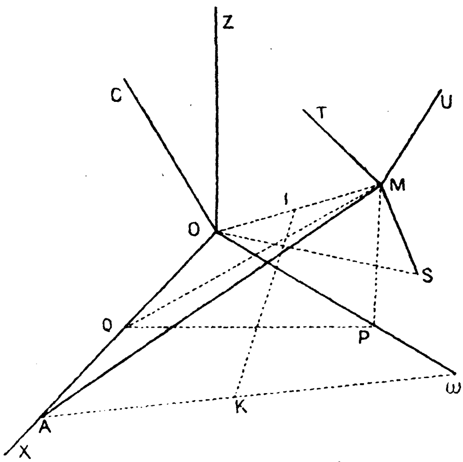
(1) *Voir* l'article de A. Mannheim, *Sue le théorème de Schœlcher* (*N. A.*, 1903, p. 105).

parallèles (et par conséquent aussi tous les méridiens) du tore.

III. *L'ellipse, projection d'un cercle de Villarceau sur le plan équatorial du tore, a pour l'un de ses foyers le pied de l'axe de la surface sur ce plan.*

Vu l'intérêt de ces théorèmes connus, il m'a paru désirable d'en posséder des démonstrations aussi élémentaires que possible. Celles-ci ont ce caractère et sont peut-être nouvelles.

2. Je désigne, dans ce qui suit, par R le rayon du cercle méridien du tore et par D la distance à l'axe du centre de ce cercle.



Un plan bitangent au tore fait avec le plan équatorial un angle θ tel que

$$\sin\theta = \frac{R}{D}.$$

Soient (*voir* figure) OZ l'axe du tore; OX la trace d'un plan bitangent sur le plan équatorial; $O\omega$ la trace sur le même plan d'un plan méridien quelconque du tore; ω le centre de l'un des cercles méridiens contenus dans ce plan; M l'un des points où le plan bitangent coupe le cercle méridien. On a

$$O\omega = D, \qquad \omega M = R.$$

Soient encore P la projection de M sur $O\omega$; Q celle de P sur OX; S celle de O sur ωM. L'angle θ se retrouve en $\widehat{PQM}$. On a donc

$$\sin \widehat{PQM} = \frac{PM}{QM} = \frac{\omega M}{O\omega}.$$

D'autre part, en évaluant de deux manières différentes l'aire du triangle $O\omega M$, on a

$$SO.\omega M = PM.O\omega$$

ou

$$\frac{\omega M}{O\omega} = \frac{PM}{SO}.$$

Donc

$$\frac{PM}{QM} = \frac{PM}{SO} \qquad \text{et} \qquad QM = SO.$$

Les deux triangles rectangles OQM, MSO sont égaux, et l'on a

$$OQ = MS.$$

Marquons maintenant sur OX un point A tel que $OA = R$, et cela de telle manière que les points O, Q, A aient la même disposition que les points M, S, ω. On a $QA = S\omega$. Par conséquent, les deux triangles rectangles AQM, ωSO sont égaux, ce qui donne

$$MA = O\omega = D.$$

Il résulte de là que le point M décrit, quand on fait varier le plan méridien $OZ\omega$, un cercle de centre A et de rayon D. Si l'on remplace le point M par le second point de rencontre du plan bitangent avec le cercle méridien considéré, on trouve pour lieu un cercle égal au premier, ayant pour centre le point symétrique de A par rapport à O.

Le théorème I est donc démontré.

3. Le quadrilatère gauche $OAM\omega$ est un *isogramme* ([1]), c'est-à-dire qu'il a ses côtés opposés égaux deux à deux. Il possède un axe de symétrie, qui est la droite joignant le milieu I de OM au milieu K de $A\omega$: en effet de l'égalité des triangles OAM, $M\omega O$, il résulte que l'on a $AI = \omega I$. Par conséquent KI est une médiatrice de $A\omega$; c'est de même une médiatrice de OM, donc, etc.

Cela posé, considérons l'angle sous lequel se coupent en M le cercle de Villarceau et le parallèle du tore. La tangente au cercle de Villarceau est MT, perpendiculaire à AM dans le plan AMO; la tangente au parallèle est MU, perpendiculaire au plan $OM\omega$. Considérons les symétriques de ces droites par rapport à IK. La symétrique de MT est la perpendiculaire à ωO dans le plan ωOM : c'est donc OZ. La symétrique de MU est la perpendiculaire OC élevée en O au plan MOA. On a donc

$$\widehat{TMU} = \widehat{ZOC} = \theta.$$

Ainsi, les cercles de Villarceau et les parallèles se coupent sous l'angle constant θ. C'est le théorème II.

4. La projection du cercle de Villarceau sur le plan

([1]) Ce terme est de M. T. Bennett (*voir* plus loin).

équatorial du tore est une ellipse ayant le point A pour centre et la droite AX pour grand axe. Les longueurs a et b du demi-grand axe et du demi-petit axe de cette ellipse sont données par

$$a = D, \qquad b = D\cos\theta,$$

d'où, avec la notation ordinaire,

$$c = D\sin\theta = R.$$

Par conséquent l'ellipse a bien un foyer en O (théorème III).

5. Imaginons que le point M décrive le cercle de Villarceau avec une vitesse constante. Ce mouvement peut encore être obtenu en faisant tourner le plan OZω autour de l'axe OZ, en même temps que le point M décrit le méridien contenu dans le plan. Il résulte de l'égalité des angles $\widehat{OAM}$, $\widehat{M\omega O}$ *que la vitesse de ce mouvement relatif est constante aussi.*

6. Appelons *dièdres de l'isogramme* les quatre dièdres dont chacun a pour arête un côté de l'isogramme, ses faces passant par les deux sommets non situés sur le côté considéré de l'isogramme. Les dièdres d'arêtes Oω et MA sont égaux à $\frac{\pi}{2}$, les dièdres d'arêtes OA et ωM sont égaux à θ. Ils sont donc tous constants, et l'on se trouve en présence d'un cas particulier du théorème sur lequel est fondé le mécanisme si remarquable de M. Bennett (1) : *un isogramme peut être déformé, les longueurs de ses côtés et les grandeurs de ses dièdres étant conservées.*

---

(1) *Voir* M. d'Ocagne, *Cours de Géométrie*, t. II, p. 55. — R. Bricard, *Cinématique et mécanismes*, p. 159.

Dans le cas général, aucun dièdre de l'isogramme n'est droit, et le mécanisme se rattache au théorème suivant, qui contient celui de Villarceau comme cas particulier (et qui est également connu) : *la surface de révolution, lieu d'un cercle C tournant autour d'un axe quelconque, contient encore des cercles autres que les parallèles, les cercles C et les symétriques de ces derniers par rapport aux divers plans passant par l'axe de la surface.*