NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

E. LAINÉ

Sur un point de la théorie des complexes de droites

Nouvelles annales de mathématiques 5e série, tome 3 (1924), p. 300-308

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1924_5_3__300_1>

SUR UN POINT DE LA THÉORIE DES COMPLEXES DE DROITES;

PAR E. LAINÉ.

Nous représenterons une droite quelconque par les équations

$$x = az + f,$$
$$y = bz + g,$$

([1]) On doit supposer que les masses sont réparties sur un ensemble continu pour obtenir des équations intégrales : le raisonnement serait à reprendre par exemple si les masses étaient réparties, le long de la position verticale du fil, sur un ensemble parfait discontinu. Il faut alors utiliser l'intégrale de Stieltjes.

et nous prendrons, suivant les notations de M. Vessiot (1), l'équation du complexe sous la forme

$$g = \psi(a, b, f). \tag{1}$$

De plus nous choisirons comme paramètre sur une courbe quelconque du complexe la variable z. En désignant par des accents les dérivées par rapport à z, on aura donc

$$a = x', \qquad b = y', \qquad f = x - x'z, \qquad g = y - y'z,$$

et l'équation des courbes du complexe s'écrira

$$y - y'z - \psi(x', y', x - x'z) = 0. \tag{2}$$

Les coefficients directeurs de la binormale seront égaux à

$$-1, \quad \frac{x''}{y''}, \quad x' - y'\frac{x''}{y''}.$$

En dérivant l'équation (2) par rapport à z, on aura d'ailleurs

$$\frac{x''}{y''} = \frac{z + \psi_{y'}}{z\psi_f - \psi_{x'}},$$

ce qui montre que le rapport $\frac{x''}{y''}$ ne dépend que des éléments du premier ordre. Si donc deux courbes du complexe ont en commun un élément du premier ordre, elles ont aussi en ce point même plan osculateur : c'est, comme il est bien connu, le plan tangent au cône du complexe associé à ce point, le long de la tangente commune aux deux courbes.

Après avoir établi ce résultat, Sophus Lie, voulant généraliser une propriété des complexes linéaires, a ensuite tenté de démontrer (2) que deux courbes du

(1) *Leçons de Géométrie supérieure*, p. 261.

(2) Cf. *Geometrie der Berührungstransformationen*, p. 310.

complexe, qui ont en commun un élément du premier ordre, ont aussi même torsion au point correspondant. Mais sa démonstration, qui repose sur la dérivation de certaines relations non identiquement vérifiées, est manifestement inexacte. Nous appellerons, pour simplifier, « propriété de Lie » la propriété d'égalité des torsions, et nous allons chercher à déterminer tous les complexes qui possèdent la propriété de Lie.

Nous poserons

$$\frac{x''}{y''} = \frac{z + \psi_{y'}}{z\psi_f - \psi_{x'}} = u.$$

Soient d'autre part $(\alpha'', \beta'', \gamma'')$ les cosinus directeurs de la binormale, $\frac{d\tau}{ds}$ la torsion, d'une courbe du complexe. On aura, en désignant par ρ un coefficient de proportionnalité,

$$\alpha'' = -\rho, \qquad \beta'' = \rho u, \qquad \gamma'' = \rho(x' - uy'),$$
$$d\tau^2 = d\alpha''^2 + d\beta''^2 + d\gamma''^2,$$

et l'on en déduit, après quelques simplifications aisées,

$$\frac{d\tau^2}{ds^2} = \rho^4 u'^2.$$

Donc, pour que la torsion soit indépendante des éléments du second ordre, il faut et il suffit qu'il en soit de même de u', ou encore de $\frac{u'}{u}$. Or on a

$$\frac{u}{u} = \frac{1 + x''(\psi_{x'y'} - z\psi_{y'f}) + y''\psi_{y'y'}}{z + \psi_{y'}}$$
$$- \frac{\psi_f + z[x''(\psi_{x'f} - z\psi_{ff}) + y''\psi_{y'f}] - x''(\psi_{x'x'} - z\psi_{x'f}) - y''\psi_{x'y'}}{z\psi_f - \psi_{x'}}.$$

Si l'on remplace x'' par $y''\frac{z + \psi_{y'}}{z\psi_f - \psi_{x'}}$, on aura

$$\frac{u'}{u} = \theta_1 + y''\theta_2,$$

Θ_1 et Θ_2 ne dépendant que des éléments du premier ordre. D'ailleurs

$$\Theta_2 = \frac{(z+\psi_{y'})(\psi_{x'x'} - 2z\psi_{x'f} + z^2\psi_{ff})}{(z\psi_f - \psi_{x'})^2} + 2\,\frac{\psi_{x'y'} - z\psi_{y'f}}{z\psi_f - \psi_{x'}} + \frac{\psi_{y'y'}}{z+\psi_{y'}}.$$

En chassant les dénominateurs, on obtient finalement l'équation

$$(3)\quad (z\psi_f - \psi_{x'})^2\psi_{y'y'} + 2(z\psi_f - \psi_{x'})(z+\psi_{y'})(\psi_{x'y'} - z\psi_{y'f}) + (z+\psi_{y'})^2(\psi_{x'x'} - 2z\psi_{x'f} + z^2\psi_{ff}) = 0.$$

Telle est la condition nécessaire et suffisante pour que le complexe défini par l'équation (1) possède la propriété de Lie. Cette équation doit être vérifiée quand on tient compte de l'équation (2), donc identiquement puisqu'elle ne contient pas y.

Observons que l'équation (3) est satisfaite pour tout élément du premier ordre appartenant à la surface des singularités [1]; mais il est clair que, pour un pareil élément, les calculs qui ont conduit à l'équation (3) deviennent illusoires.

Nous allons maintenant déterminer les fonctions ψ qui satisfont à l'équation (3). On peut évidemment considérer, dans cette équation, les variables x', y', z et $f = x - x'z$ comme autant de variables indépendantes. Le premier membre de l'équation (3) étant un polynome en z, tous les coefficients de ce polynome doivent être nuls; or il existe un seul terme en z^4, de coefficient ψ_{ff} : on aura donc, en revenant aux variables a, b, f,

$$\psi = \mathrm{A}(a, b) + f\mathrm{B}(a, b),$$

---

[1] *Cf.* VESSIOT, *Leçons*, p. 263.

A et B désignant deux fonctions inconnues. En tenant compte de cette valeur de ψ, on voit que le premier membre de l'équation (3) est un polynome en f et z, et en égalant à zéro les coefficients de ce polynome, on obtient un système d'équations aux dérivées partielles auquel devront satisfaire les fonctions A et B. Ce système se réduit à quatre équations distinctes, savoir

$$(4) \qquad B\frac{\partial B}{\partial b} + \frac{\partial B}{\partial a} = 0,$$

$$(5) \qquad B^2\frac{\partial^2 A}{\partial b^2} + 2B\frac{\partial^2 A}{\partial a\,\partial b} + \frac{\partial^2 A}{\partial a^2} + 2\left(\frac{\partial B}{\partial b}\frac{\partial A}{\partial a} - \frac{\partial B}{\partial a}\frac{\partial A}{\partial b}\right) = 0,$$

$$(6) \qquad -B\frac{\partial A}{\partial a}\frac{\partial^2 A}{\partial b^2} + \left(B\frac{\partial A}{\partial b} - \frac{\partial A}{\partial a}\right)\frac{\partial^2 A}{\partial a\,\partial b} + \frac{\partial A}{\partial b}\frac{\partial^2 A}{\partial a^2} + \frac{\partial A}{\partial b}\left(\frac{\partial B}{\partial b}\frac{\partial A}{\partial a} - \frac{\partial B}{\partial a}\frac{\partial A}{\partial b}\right) = 0,$$

$$(7) \qquad \left(\frac{\partial A}{\partial a}\right)^2\frac{\partial^2 A}{\partial b^2} - 2\frac{\partial A}{\partial a}\frac{\partial A}{\partial b}\frac{\partial^2 A}{\partial a\,\partial b} + \left(\frac{\partial A}{\partial b}\right)^2\frac{\partial^2 A}{\partial a^2} = 0.$$

Posons

$$B\frac{\partial A}{\partial b} + \frac{\partial A}{\partial a} = U(a, b);$$

il viendra successivement

$$\frac{\partial U}{\partial a} = B\frac{\partial^2 A}{\partial a\,\partial b} + \frac{\partial^2 A}{\partial a^2} + \frac{\partial B}{\partial a}\frac{\partial A}{\partial b},$$

$$\frac{\partial U}{\partial b} = B\frac{\partial^2 A}{\partial b^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial a\,\partial b} + \frac{\partial B}{\partial b}\frac{\partial A}{\partial b};$$

d'où résulte, compte tenu de (4),

$$B^2\frac{\partial^2 A}{\partial b^2} + 2B\frac{\partial^2 A}{\partial a\partial b} + \frac{\partial^2 A}{\partial a^2} = \frac{\partial U}{\partial a} + B\frac{\partial U}{\partial b}.$$

Les équations (5) et (6) peuvent alors s'écrire

$$(5)' \qquad \frac{\partial U}{\partial a} + B\frac{\partial U}{\partial b} + 2\left(\frac{\partial B}{\partial b}\frac{\partial A}{\partial a} - \frac{\partial B}{\partial a}\frac{\partial A}{\partial b}\right) = 0,$$

$$(6)' \qquad \frac{\partial A}{\partial b}\frac{\partial U}{\partial a} - \frac{\partial A}{\partial a}\frac{\partial U}{\partial b} + 2\frac{\partial A}{\partial b}\left(\frac{\partial B}{\partial b}\frac{\partial A}{\partial a} - \frac{\partial B}{\partial a}\frac{\partial A}{\partial b}\right) = 0.$$

Multiplions $(5)'$ par $-\frac{\partial A}{\partial b}$ et ajoutons à $(6)'$; il reste simplement

$$-U\frac{\partial U}{\partial b}=0,$$

d'où

$$U=2\theta(a),$$

θ désignant une nouvelle fonction inconnue : cette dernière équation, jointe à

$$\frac{\partial B}{\partial a}\frac{\partial A}{\partial b}-\frac{\partial B}{\partial b}\frac{\partial A}{\partial a}=\theta'(a), \tag{8}$$

est donc équivalente aux équations $(5)'$ et $(6)'$.

Considérons maintenant le système

$$B\frac{\partial A}{\partial b}+\frac{\partial A}{\partial a}=2\theta(a), \tag{9}$$

$$B\frac{\partial B}{\partial b}+\frac{\partial B}{\partial a}=0; \tag{4}$$

on en tire

$$\frac{\partial B}{\partial a}\frac{\partial A}{\partial b}-\frac{\partial B}{\partial b}\frac{\partial A}{\partial a}=-2\frac{\partial B}{\partial b}\theta(a),$$

et par suite, d'après (8),

$$-2\frac{\partial B}{\partial b}=\frac{\theta'(a)}{\theta(a)}. \tag{10}$$

D'autre part, on tire de (4)

$$\frac{1}{B}\frac{\partial B}{\partial a}=-\frac{\partial B}{\partial b}=\frac{1}{2}\frac{\theta'(a)}{\theta(a)};$$

on aura donc

$$B=\psi(b)[\theta(a)]^{\frac{1}{2}}.$$

Or l'équation (10) montre que ψ doit être une fonction linéaire de b; si l'on pose

$$\psi(b)=\alpha b+\beta,$$

on aura successivement

$$\alpha\theta^{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}\frac{\theta'}{\theta},$$

$$\alpha = -\frac{1}{2}\theta^{-\frac{3}{2}}\theta',$$

$$\theta^{-\frac{1}{2}} = \alpha a + \gamma$$

et enfin

$$\theta = \frac{1}{(\alpha a + \gamma)^2},$$

(11) $$B = \frac{\alpha b + \beta}{\alpha a + \gamma}.$$

Nous supposerons d'abord $\alpha \neq 0$. Alors l'équation (6) s'écrit

$$\frac{\alpha b + \beta}{\alpha a + \gamma}\frac{\partial A}{\partial b} + \frac{\partial A}{\partial a} = \frac{2}{(\alpha a + \gamma)^2};$$

d'où l'on tire

(12) $$A = -\frac{2}{\alpha(\alpha a + \gamma)} + \varphi\left(\frac{\alpha b + \beta}{\alpha a + \gamma}\right),$$

φ désignant une fonction à déterminer. Les valeurs (11) et (12) de B et A satisfont aux équations (4), (5) et (6); portons-les dans l'équation (7) : cette équation s'écrira, toutes réductions faites,

$$\varphi'' = 0.$$

On peut donc écrire, en posant $\frac{\beta}{\alpha} = \beta_1$, $\frac{\gamma}{\alpha} = \gamma_1$, et désignant par λ, μ, ν trois autres constantes arbitraires,

$$A = \frac{\lambda a + \mu b + \nu}{a + \gamma_1}, \qquad B = \frac{b + \beta_1}{a + \gamma_1};$$

l'équation (1) s'écrit alors

$$ag - bf - \beta_1 f + \gamma_1 g - \lambda a - \mu b - \nu = 0.$$

C'est l'équation du complexe linéaire le plus général (non spécial).

Supposons en second lieu $\alpha = 0$. Alors la fonction B se réduit à une constante, λ, ainsi que la fonction $\theta(a)$, et l'équation (9) prend la forme

$$\lambda \frac{\partial A}{\partial b} + \frac{\partial A}{\partial a} = \mu,$$

μ désignant une constante arbitraire. On en déduit

$$A = \mu a + \varpi(b - \lambda a),$$

et pour déterminer la fonction inconnue ϖ, il suffit de remplacer A par sa valeur dans l'équation (7) : elle s'écrit alors, toutes réductions faites,

$$\mu^2 \varpi'' = 0.$$

On devra donc avoir :

Ou bien $\varpi'' = 0$, et alors on retrouve des complexes linéaires;

Ou bien $\mu = 0$, la fonction ϖ restant arbitraire. Les complexes correspondants sont définis par une équation de la forme

$$g - \lambda f = \varpi(b - \lambda a). \tag{13}$$

Ce sont des complexes spéciaux, formés des tangentes à un cylindre arbitrairement choisi. Les courbes de ces complexes sont définies par l'équation différentielle

$$y - zy' - \lambda(x - zx') = \varpi(y' - \lambda x'),$$

d'où l'on tire

$$(y'' - \lambda x'')(z + \varpi') = 0.$$

Ainsi, en dehors des courbes tracées arbitrairement sur le cylindre (qui est ici la surface des singularités), les courbes du complexe vérifient l'équation

$$y'' - \lambda x'' = 0,$$

d'où

$$y - \lambda x + \mu z + \nu = 0:$$

ce sont des courbes planes, tracées dans les plans tangents au cylindre. Le calcul précédent montre d'ailleurs inversement que les seuls complexes dont les courbes soient planes sont définis par l'équation (13).

En résumé, pour qu'un complexe non spécial possède la propriété de Lie, il faut et il suffit qu'il soit linéaire. Cette propriété appartient en outre aux seuls complexes spéciaux formés des tangentes à un cylindre arbitraire.

Remarque. — Si l'équation du complexe ne contient ni f, ni g, on constate très facilement que le théorème précédent lui est encore applicable.