NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Certificats de calcul différentiel et intégral

Nouvelles annales de mathématiques 5e série, tome 3 (1924), p. 276-280

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1924_5_3__276_1>

CERTIFICATS DE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. *Énoncer et démontrer le théorème relatif à l'intégrale* $\frac{1}{2i\pi}\int \frac{f'(z)}{f(z)}dz$ *prise le long d'un contour fermé* (C) *à l'intérieur duquel la fonction* $f(z)$ *n'admet pas d'autres singularités que des pôles.*

II. *On donne une courbe* (C) *ayant pour équations paramétriques*

$$x = a\cos\theta, \qquad y = a\sin\theta, \qquad z = a\sin 2\theta,$$

où a *désigne une constante et* θ *un paramètre.*

Le plan osculateur en un point M *de cette courbe coupe l'axe des* z *en un point* A. *Déterminer les lignes asymptotiques de la surface engendrée par la droite* AM *lorsque* M *parcourt* (C). *Pouvait-on prévoir que la détermination de ces lignes asymptotiques n'exigerait qu'une quadrature ?*

III. *Intégrer l'équation*

$$2y^2 - xy\frac{dy}{dx} - x^2\left[\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y\frac{d^2y}{dx^2}\right] = 0.$$

INDICATIONS SUR LA SOLUTION. — II. Le point A a pour coordonnées 0, 0, $-3z$, de sorte qu'on a à chercher les lignes asymptotiques de la surface réglée ayant pour équations paramétriques

$$X = xt. \qquad Y = yt, \qquad Z = -3z + 4zt.$$

Calcul classique conduisant à une seule quadrature parce qu'on connaît *a priori* deux lignes asymptotiques qui sont l'axe des $z (t = 0)$ et la courbe $C (t = 1)$.

III. En posant $y^2 = z$ on est ramené à une équation linéaire de forme classique qui, en posant $x = e^t$, se ramène à une équation linéaire du second ordre à coefficients constants dont l'équation caractéristique admet les racines ± 2. En remontant on arrive à l'intégrale générale cherchée

$$y^2 = Cx^2 + \frac{C'}{x^2}.$$

ÉPREUVE PRATIQUE. — *On donne en coordonnées rectangulaires la surface* (S) *ayant pour équations paramétriques*

$$x = au \sin v, \qquad y = au, \qquad z = a(1-u)\cos v,$$

où a est une constante positive donnée et où u, v sont deux paramètres.

Montrer que cette surface est engendrée par une droite qui s'appuie en un point A *sur l'axe* Oz, *en un point* B *sur la droite* $y = a$, $z = 0$, *de telle sorte que la longueur* AB *reste constante.*

Soit Σ la portion de la surface (S) *engendrée par le segment de droite* AB, A *restant du côté des z positifs et* B *du côté des x positifs.*

1° *Calculer le volume* V *compris entre Σ, le plan yOx et le plan yOz.*

2° *Soit Γ la portion de la ligne de striction de* (S) *qui se trouve située sur Σ. Calculer l'aire de la surface conique engendrée par le segment de droite* OP (O *désignant l'origine des coordonnées*) *lorsque* P *parcourt* Γ.

On pourra exprimer les coordonnées d'un point M *de cette surface conique situé sur* OP *en fonction du paramètre v et du paramètre* $w = \dfrac{OM}{OP}$.

INDICATIONS SUR LA SOLUTION. — Les courbes $v =$ const. sont les droites considérées dont les points A et B sont $u = 0$ et $u = 1$.

Σ est la portion de surface S obtenue en faisant varier u de 0 à 1 et v de 0 à $\frac{\pi}{2}$ de sorte que

$$V = \int\int z\, dx\, dy$$

devient, exprimée en u et v, une intégrale double étendue à un rectangle.

Le point de striction sur la génératrice v est donné par $u = \sin^2 v$ et Γ est obtenu en faisant varier v de 0 à $\frac{\pi}{2}$. Les coordonnées d'un point de la surface conique seront

$$x = aw\sin^3 v, \qquad y = aw\sin^2 v, \qquad z = aw\cos^3 v,$$

la surface cherchée sera une intégrale double étendue au rectangle obtenu en faisant varier w de 0 à 1 et v de 0 à $\frac{\pi}{2}$.

Bordeaux, novembre 1924.)

Epreuve théorique. — I. *Étant donnée l'équation aux dérivées partielles (notations classiques)*

$$p - q^2 x - z = 0,$$

intégrer complètement les équations des caractéristiques et déterminer l'intégrale $z = \varphi(x, y)$ telle que $\varphi(0, y) = y^2$ identiquement.

II. *Étant donnée une courbe gauche* (C), *on mène en un point* M *de cette courbe la tangente* $M\xi$, *la normale principale* $M\eta$ *et la binormale* $M\zeta$. *Soient* MD *la bissectrice de l'angle* $\xi M \zeta$ *et* (S) *la surface engendrée par* MD *quand* M *parcourt* (C). *On prend sur* MD *un point* P *défini par* $MP = u\sqrt{2}$; *former l'équation du plan tangent en* P *à* (S) *rapportée aux axes* $M\xi$, $M\eta$, $M\zeta$ *et en déduire à quelle condition la surface* (S) *sera développable. La courbe* (C) *est, dans ce cas, une hélice; montrer que la surface* (S) *est alors le cylindre sur lequel est tracée cette hélice.*

Dans le cas général où (S) *n'est pas développable, former l'équation différentielle de Riccati donnant ses lignes asymptotiques non rectilignes.*

Indications sur la solution. — I. Les équations des caractéristiques sont

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{-2qx} = \frac{dp}{q^2 + p} = \frac{dq}{q}$$

donnant les intégrales premières

$$qe^{-x} = \text{const.}, \qquad \frac{p}{q} - q = \text{const.}, \qquad y + 2q(x-1) = \text{const.}$$

et l'intégrale demandée s'obtient alors par l'application immédiate de la méthode de Cauchy; c'est

$$z = \frac{y^2}{4(1-x) - 3e^{-x}}.$$

II. Considérant l'arc s de (C) comme étant le temps, on connaît le mouvement du trièdre $M\xi\eta\zeta$: translation de composantes 1, 0, 0 et rotation de composantes $\frac{-1}{T}$, 0, $\frac{1}{R}$, T et R étant les rayons de torsion et de courbure.

Le plan tangent au point u, 0, u de (S) a sa direction déterminée par la génératrice et par la vitesse d'entraînement de ce point; on trouve ainsi, en posant

$$\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{T}\right) u = v,$$

le plan

$$(X-u)v - Y - (Z-u)v = 0.$$

La surface sera développable si sa direction est indépendante de u, c'est-à-dire si l'on a $R = T$. (C) est alors une hélice et le plan tangent précédent est YzO, c'est le plan $M\xi\zeta$ dont (S) est ainsi l'enveloppe, plan qui, d'après les propriétés de l'hélice, est le plan tangent au cylindre sur lequel elle est tracée, donc (S) est ce cylindre.

Dans le cas général, une ligne asymptotique de S sera obtenue en considérant u comme fonction de s et écrivant que l'accélération du point u, O, u, calculée d'après une méthode classique est dans le plan tangent précédemment écrit. On trouve ainsi une équation en u qui s'exprime immédiatement en v sous la forme de Riccati :

$$\frac{dv}{ds} = -\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{T}\right) v^2 - \frac{1}{R}.$$

Épreuve pratique. — *Calculer la valeur de l'intégrale de variable complexe*

$$\int_0^4 \frac{dz}{(1-z^2)\sqrt{z}}$$

prise de o *à* 4 *le long d'un chemin tracé tout entier dans le premier angle de coordonnées.*

Indications sur la solution. — On ramène le chemin à un petit arc de cercle de centre origine suivi du chemin rectiligne sur l'axe réel, chemin interrompu par une petite demi-circonférence autour du pôle $z = 1$.

(Bordeaux, novembre 1924.)