NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

BERTRAND GAMBIER

# Problème de Poncelet et problème analogue

*Nouvelles annales de mathématiques 5e série*, tome 3 (1924), p. 256-276

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1924_5_3__256_0>

[L$^1$17d]

# PROBLÈME DE PONCELET ET PROBLÈME ANALOGUE;

PAR M. BERTRAND GAMBIER,
Professeur à la Faculté des Sciences de Lille.

1. Poncelet a montré qu'étant donnés une première conique $C_0$, un triangle T autopolaire relativement à $C_0$, et un entier $n \geqq 3$, il existe $\infty^1$ coniques $C_1$, conjuguées par rapport à T, telles que chaque couple $(C_0, C_1)$ admette $\infty^1$ polygones $P_n$ de $n$ côtés inscrits dans $C_0$ et circonscrits à $C_1$; pour un tel couple $(C_0, C_1)$, on peut prendre arbitrairement, soit le premier sommet sur $C_0$, soit le premier côté tangent à $C_1$. Cette question, devenue classique, a été l'objet de nombreux travaux. Je voudrais montrer comment on peut la résoudre en n'employant que les propriétés les plus simples des

---

d'où

$$m_0 = A - \frac{B^2 + C^2}{A}.$$

Or il est clair que l'on a

$$A = \Sigma |a_p|^2,$$

et, si l'on pose $a'_p = \alpha_p - \beta_p i$,

$$B + Ci = \Sigma a'_p a_{p+1}:$$

donc finalement on a

$$|x|^2 \leqq \Sigma |a_p|^2 - \frac{|\Sigma a'_p a_{p+1}|^2}{\Sigma |a_p|^2}.$$

Les $\Sigma$ portent sur les indices $p$ allant de $-1$ à $n$; mais il est clair que, dans le premier, on peut ne faire varier $p$ que de $0$ à $n$ et, dans le second, de $0$ à $n-1$. H. L.

seules coniques ; j'engagerai néanmoins à lire la solution, basée sur les fonctions elliptiques, donnée, par exemple, dans le traité d'Halphen, soit la solution si élégante, donnée d'après Cayley, par M. Lebesgue aux *Annales de Toulouse* (1922), basée sur les propriétés des cubiques générales et la théorie des groupes de points résiduels.

Je montrerai que la construction de polygones $\Pi_n$ inscrits dans une conique $C_0$, de façon que chaque couple de deux sommets voisins soit conjugué par rapport à une nouvelle conique $\Gamma$ se ramène à la question étudiée par Poncelet, et inversement. On obtient d'ailleurs un résultat, accidentel, mais curieux, à savoir que si deux coniques $C_0$ et $C_1$ admettent $\infty^1$ quadrilatères $_4$ de Poncelet, elles admettent $\infty^1$ hexagones $\Pi_6$ du nouveau problème.

Nous verrons aussi que l'étude du problème de Poncelet est en relation étroite avec l'itération de substitutions rationnelles effectuées sur des polynomes homogènes à 3 variables.

**2.** Étant données deux coniques $C_0$, $C_1$, d'un point arbitraire $A_0$ de $C_0$, je mène une tangente à $C_1$ qui coupe $C_0$ de nouveau en $A_1$ ; de $A_1$ je mène à $C_1$ la tangente autre que $A_0A_1$ ; j'obtiens ainsi le point $A_2$ sur $C_0$, et continue ainsi de façon à obtenir une *chaîne* $A_0A_1\ldots A_i$ *de* $i$ *côtés, inscrite dans* $C_0$ *et circonscrite à* $C_1$. La droite $A_0A_i$, variable avec $A_0$, enveloppe manifestement une conique $C_i$, car par tout point de $C_0$ passent deux chaînes et deux seulement admettant $A_0$ pour premier sommet ; les deux tangentes issues de $A_0$ à $C_i$ ne se confondent que si les deux tangentes issues de $A_0$ à $C_1$ se confondent, *donc* $C_i$ *appartient au faisceau linéaire* $(C_0, C_1)$, *quel que soit l'entier* $i$.

Cette remarque est essentielle et donne la clé du problème (1).

Soient $A_0 A_1 A_2 \ldots A_n$ et $A_0 A'_1 \ldots A'_n$ les deux chaînes d'ordre $n$ issues d'un point quelconque de $C_0$ : la droite $A_n A'_n$ enveloppe la conique $C_{2n}$ et l'on a une identité

$$C_{2n} \equiv I_{2n+1} C_0 + I_{2n} C_1, \tag{1}$$

où $I_{2n}$, $I_{2n+1}$ sont des fonctions algébriques rationnelles et entières des coefficients qui entrent dans les premiers membres $C_0$ et $C_1$ des équations des coniques du début. Si l'on écrit les équations numériques

$$I_{2n} = 0, \tag{2}$$

$$I_{2n+1} = 0, \tag{3}$$

*tout couple de coniques* $C_0$, $C_1$ *satisfaisant à* $I_{2n} = 0$ (*ou* $I_{2n+1} = 0$) *admet* $\infty^1$ *polygones* $P_{2n}$ *de Poncelet* (*ou* $\infty^1$ *polygones* $P_{2n+1}$ *de Poncelet*).

Il faut expliquer un paradoxe : étant donné le point $A_0$, les droites $A_1 A'_1$, $A_2 A'_2, \ldots$, $A_n A'_n$, qui enveloppent respectivement $C_2$, $C_4$, $\ldots$, $C_{2n}$, quand $A_0$ décrit $C_0$, ont des équations rationnelles par rapport aux coordonnées de $A_0$ ou, si l'on préfère, par rapport au paramètre $t$ qui individualise $A_0$ sur $C_0$. *On a toujours quatre solutions du problème* $P_{2n}$ *ou* $P_{2n+1}$, car elles correspondent aux tangentes communes aux coniques $C_0$ et $C_{2n}$ pour $P_{2n}$ et $C_1$, $C_{2n}$ pour $P_{2n+1}$ : mais *ces solutions sont impropres, et connues a priori.*

En effet, prenons comme $A_0$ un point commun à $C_0$ et $C_1$ : $A_1$ et $A'_1$ sont confondus, $A_2$ et $A'_2$ aussi, $\ldots$, $A_n$ et $A'_n$ aussi ; c'est cette remarque qui nous a montré que $A_0$ appartient à $C_i$, quel que soit $i$. Les droites $A_1 A'_1$,

(1) On peut remarquer qu'une chaîne de *zéro* côté donne comme enveloppe $C_0$ et qu'une chaîne de *un* côté donne $C_1$.

$A_2A'_2$, ..., $A_nA'_n$, correspondant à cet $A_0$ *particulier*, sont des tangentes communes à $C_0$ et $C_2$, ou $C_0$ et $C_4$, ..., ou $C_0$ et $C_{2n}$. La chaîne *particulière*

$$A_n A_{n-1} \dots A_1 A_0 A_1 \dots A_{n-1} A_n$$

*parcourue à partir de cet* $A_n$ *particulier*, *pris comme premier sommet*, *avec* $A_nA_{n-1}$ *comme premier chaînon*, se replie en $A_0$ sur elle-même et se referme en $A_n$ de sorte qu'elle donne un $P_{2n}$ *impropre;* partir de cet $A_n$ *particulier* avec la tangente autre que $A_nA_{n-1}$ ne referme plus la chaîne; partir sur la chaîne particulière $A_nA_{n-1}\dots A_1A_0$ d'un sommet $A_i$ autre que $A_n$, soit avec la tangente $A_iA_{i-1}$, soit avec la tangente $A_iA_{i+1}$ ne referme pas la chaîne avec $2n$ chaînons. Les quatre points communs à $C_0$ et $C_1$ donnent donc les quatre solutions $P_{2n}$ prévues *a priori*, mais impropres.

De même, soit $B_0$ un point de contact avec $C_0$ d'une tangente commune à $C_0$ et $C_1$; soit $B_0B_1$ la tangente à $C_1$ issue de $B_0$ et autre que la tangente en $B_0$ à $C_0$; la chaîne $B_0B_1B_2\dots B_n$ s'en déduit et l'on a manifestement $B'_1 = B_0$, $B'_2 = B_1$, ..., $B'_n = B_{n-1}$; la droite $B_nB_{n-1}$ est donc la droite $B_nB'_n$ relative à ce $B_0$ *particulier;* donc la chaîne $B_nB_{n-1}\dots B_1B_0B_0B_1\dots B_{n-1}B_n$ se referme bien en $B_n$ par $(2n+1)$ chaînons consécutifs, et donne un $P_{2n+1}$ impropre; mêmes observations que plus haut, il faut partir de $B_n$ (et non de $B_i$) et avec la tangente $B_nB_{n-1}$.

Formons donc l'équation de $A_nA'_n$ au moyen du paramètre $t$ de $A_0$ et exprimons que cette droite touche $C_0$ ou $C_1$ : nous avons une équation du quatrième degré en $t$

$$E(t) = 0 \tag{4}$$

qui coïncide, *sauf un facteur numérique en* $t$, *mais* *fonction des coefficients de* $C_0$ et $C_1$, soit $I_{2n}$ ou $I_{2n+1}$, avec l'équation

$$(5) \qquad e(t) = 0$$

que nous pouvons écrire à l'avance, relative aux points communs à $C_0$ et $C_1$ ou aux points de contact avec $C_0$ des tangentes communes à $C_0$ et $C_1$. *Ce facteur* $I_{2n}$ *ou* $I_{2n+1}$ *n'est pas numérique par rapport aux coefficients de* $C_1$ et $C_0$, sinon on n'aurait *jamais* de polygones $P_n$, quelles que fussent $C_0$ et $C_1$ : or l'existence de polygones réguliers dément cette impossibilité. *Quel que soit* $n$, *il existe donc des couples de coniques admettant des polygones* $P_n$ *de Poncelet.*

Nous retombons donc sur le même résultat que plus haut : $I_n \neq 0$, impossibilité des $P_n$ *véritables;* $I_n = 0$, $\infty^1$ polygones $P_n$. Il suffit donc d'avoir constaté l'existence d'un polygone $P_n$ (*véritable*) inscrit à $C_0$, circonscrit à $C_1$ pour en déduire l'existence de $\infty^1$ polygones de même espèce; cela tient à ce que, en dehors des quatre tangentes impropres du cas général, la conique $C_0$ (ou $C_1$) admet avec la conique $C_{\frac{n}{2}}$ si $n$ est pair $\left(\text{ou } C_{\frac{n-1}{2}}\right.$ si $n$ est impair$\left.\right)$ $n$ tangentes nouvelles, de sorte qu'il y a identité des deux coniques.

3. Dans le cas où les polygones $P_n$ *véritables* existent, on peut partir d'un point *arbitraire* de $C_0$ et l'on revient en ce point au bout de $n$ chaînons. Étudions à ce point de vue les points *particuliers* $A_0$ communs à $C_0$ et $C_1$ et les points $B_0$ de contact avec $C_0$ d'une tangente commune à $C_0$ et $C_1$.

1° Existence du polygone $P_{2n}$ : en partant de $A_0$, $n$ chaînons conduisent en un nouveau point commun à $C_0$ et $C_1$ ; en partant de $B_0$ avec la tangente à $C_1$ distincte de la tangente en $B_0$ à $C_0$, $n-1$ chaînons conduisent en un nouveau point de contact d'une tangente commune.

2° Existence du polygone $P_{2n+1}$ : partant de $A_0$, $n$ chaînons conduisent en un point $B_0$ de contact avec $C_0$ d'une tangente commune ; inversement, partir de $B_0$ conduit en $A_0$.

L'un de ces critériums nouveaux est nécessaire et suffisant.

Sans avoir recours à ces critériums particuliers, nous pouvions donner des exemples de $\infty^1$, $P_3$, $P_4$ ou $P_5$, puisque l'on peut faire passer une conique par 3, 4 ou 5 points arbitraires et inscrire une conique dans un polygone de 3, 4 ou 5 droites arbitraires. Avec les nouveaux critériums on peut donner des exemples graphiques de $P_6$, $P_7$ ou $P_8$ en se donnant arbitrairement $C_0$ et une chaîne spéciale convenablement choisie ; par exemple pour l'octogone, trois cordes consécutives de $C_0$ et les tangentes aux deux extrémités déterminent complètement la conique $C_1$ tangente à ces cinq droites (tandis qu'une chaîne de quatre cordes de $C_0$ donnerait quatre tangentes à $C_1$ et les points de contact de deux d'entre elles).

4. Dans le cas général, la suite illimitée

$$C_0\, C_1\, C_2 \ldots C_n\, C_{n+1} \ldots$$

n'est pas périodique. Dans le cas de polygones effectifs $P_{2n}$, on a la réduction exprimée par le schéma

$$(6)\quad \left\{\begin{array}{llllllll} C_0\, C_1\, C_2 \ldots C_{2n-p} \ldots & C_{2n-2} & C_{2n-1} & C_{2n} & C_{2n+1} & C_{2n+2} & \ldots, \\ C_0\, C_1\, C_2 \ldots C_p \phantom{{}_{2n-}} \ldots & C_2 & C_1 & C_0 & C_1 & C_2 & \ldots. \end{array}\right.$$

Pour les polygones $P_{2n+1}$ on a de même

$$(7)\quad \begin{cases} C_0\,C_1\,C_2\ldots C_{2n-p}\ldots C_{2n-2}\,C_{2n-1}\,C_{2n}\,C_{2n+1}\,C_{2n+2}\,C_{2n+1}\ldots,\\ C_0\,C_1\,C_2\ldots C_{p+1}\;\ldots C_3\quad C_2\quad C_1\;C_0\quad C_1\quad C_2\quad\ldots. \end{cases}$$

Réciproquement, écrire la seule équation $C_p = C_{2n-p}$ suffit pour exprimer la possibilité des $P_{2n}$ ; cela fait bien une équation unique, puisqu'il s'agit de coniques d'un même faisceau linéaire ; mais ce procédé, qui a l'avantage de ne pas obliger à former successivement les équations des coniques $C_2$, $C_4$, ... jusqu'à $C_{2n}$ compris, a l'inconvénient d'introduire des solutions étrangères ; ainsi écrire $C_2 = C_{2n-2}$ entraîne soit $P_{2n}$, soit $P_{2n-4}$, comme on le voit en écrivant de nouveau les lignes (6) en y remplaçant $n$ par $n - 2$. De même, écrire $C_{2n} = C_1$ entraîne soit $P_{2n+1}$, soit $P_{2n-1}$ ; ce mode *particulier* de calcul fait donc apparaître, comme facteurs parasites, des invariants déjà rencontrés dans les calculs successifs relatifs à $P_3$, $P_4$, ..., $P_n$, $P_{n+1}$, .... Écrire $C_{2n} = C_0$ n'introduit pas de tels facteurs parasites.

Mais si $n$ n'est pas premier, *quel que soit le mode de calcul employé*, on retrouve comme facteurs étrangers les conditions déjà rencontrées pour les diviseurs de $n$ ; en effet un polygone proprement dit $P_{n_1}$ parcouru $n_2$ fois consécutivement est encore un polygone (non replié) de $n_1 n_2$ côtés. On saura donc éliminer ces facteurs parasites.

On remarquera que, si $p$ est premier avec $n$, et si $C_0$ et $C_1$ admettent des polygones $P_n$, il en est de même de $C_0$ et $C_p$ ; si $p$ et $n$ ont un plus grand commun diviseur $\delta$, $C_0$ et $C_p$ admettent des polygones $P_{\frac{n}{\delta}}$.

Enfin une dernière remarque très simple : si l'on étudie le cas $P_{2n}$, la conique $C_n$ se réduit nécessairement à un point et ce point est l'un des trois sommets du triangle autopolaire commun à $C_0$ et $C_1$ : se donner $C_0$ et ce triangle donne donc *trois séries* analytiquement distinctes de coniques $C_1$. C'est ce qui explique pourquoi, en cherchant les quadrilatères à la fois inscriptibles dans un cercle et circonscrits à un autre, on trouve *deux catégories* distinctes : R, $R_1$ étant les rayons des cercles $C_0$, $C_1$ et D la distance des centres, on a soit

$$R_1 = D,$$

soit

$$\frac{1}{(R-D)^2} + \frac{1}{(R+D)^2} = \frac{1}{R_1^2},$$

de sorte que dans le premier cas $C_0$ passe par le centre de $C_1$ et les sommets opposés du quadrilatère sont symétriques par rapport à la ligne des centres, tandis que dans le second cas, les diagonales du quadrilatère passent toutes deux en l'un des cercles de rayon nul appartenant au faisceau ($C_0$, $C_1$).

On remarquera qu'il est intéressant de supposer les polygones $P_n$ réels, donc $C_0$ et $C_1$ réelles toutes deux, la totalité ou une portion de $C_0$ étant extérieure à $C_1$. Or, pourvu que les équations de $C_0$ et $C_1$ soient à coefficients réels, le triangle autopolaire commun est réel et l'un des sommets est *intérieur* à $C_0$ : donc par une perspective *réelle* qui renvoie le côté opposé à l'infini, on peut supposer que $C_0$ *et* $C_1$ *ont le même centre et que* $C_0$ *est du genre ellipse;* cela fait, la transformation homographique bien connue transforme $C_0$ en un *cercle* : on peut donc, sans restreindre la généralité, prendre les équations des coniques sous la *forme réduite*

$$(C_0) \qquad x^2 + y^2 - 1 = 0,$$

$$(C_1) \qquad \frac{x^2}{a_1} + \frac{y^2}{b_1} - \frac{1}{c_1} = 0,$$

les notations étant choisies de façon que les formules de récurrence que nous développerons plus bas aient la forme la plus simple. Quand on revient aux équations générales (précédant l'homographie ou perspective), il suffit de remarquer que l'équation

$$C_0 - \lambda C_1 = 0$$

se réduit à deux droites pour $\lambda = a_1, b_1, c_1$; donc on se rappellera que $a_1, b_1, c_1$ sont les racines de l'équation bien connue

$$\Delta - \Theta\lambda + \Theta_1\lambda^2 - \Delta_1 = 0$$

dont le premier membre est le discriminant de $C_0 - \lambda C_1$.

3. Soient $(\cos\varphi_0, \sin\varphi_0)$ les coordonnées du point $A_0$. La droite $A_0 A_1$ a pour équation

$$x \cos\frac{\varphi_0 + \varphi_1}{2} + y \sin\frac{\varphi_0 + \varphi_1}{2} - \cos\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2} = 0.$$

La condition de contact avec $C_1$ prend la forme

$$\begin{aligned}&(b_1 + c_1 - a_1)\cos\varphi_0\cos\varphi_1\\ &+ (c_1 + a_1 - b_1)\sin\varphi_0\sin\varphi_1 - (a_1 + b_1 - c_1) = 0,\end{aligned}$$

de sorte que l'équation de $A_1 A'_1$ est

$$\begin{aligned}(8)\qquad &x(b_1 + c_1 - a_1)\cos\varphi_0\\ &+ (c_1 + a_1 - b_1)\sin\varphi_0 - (a_1 + b_1 - c_1) = 0.\end{aligned}$$

Nous avons donc la condition d'existence des *quadrilatères* $P_4$

$$I_4 \equiv (b_1 + c_1 - a_1)(c_1 + a_1 - b_1)(a_1 + b_1 - c_1) = 0.$$

[Si l'on applique ceci à deux cercles rapportés à leur ligne des centres et à leur axe radical

$$C_0 \equiv x^2 + y^2 - 2a\,x + c = 0,$$
$$C_1 \equiv x^2 + y^2 - 2a'x + c = 0,$$

les racines de l'équation en $\lambda$ s'obstiennent aisément et l'on trouve

$$\lambda_1+\lambda_2=\frac{R^2+R_1^2-D^2}{R_1^2},\qquad \lambda_1\lambda_2=\frac{R^2}{R_1^2},\qquad \lambda_3=1,$$

de sorte que

$$\lambda_3=\lambda_1+\lambda_2$$

donne $D=\pm R$ et $\lambda_3=\pm(\lambda_1-\lambda_2)$ donne la relation annoncée plus haut.]

De l'équation (8) on déduit l'équation ponctuelle de $C_2$

$$\begin{aligned}C_2\equiv\quad &(b_1+c_1-a_1)^2x^2\\ &+(c_1+a_1-b_1)^2y^2-(a_1+b_1-c_1)^2=0.\end{aligned}$$

et l'on trouve immédiatement en posant

$$\begin{aligned}&I_3\equiv a_1^2+b_1^2+c_1^2-2b_1c_1-2c_1a_1-2a_1b_1,\\ &C_2\equiv I_3C_0+4a_1b_1c_1C_1.\end{aligned}$$

La condition d'existence des *triangles* $P_3$ est donc

$$I_3=0.$$

D'ailleurs, si l'on adopte la seconde marche de calcul proposée et si l'on écrit que $A_1A'_1$ est tangente à $C_1$ on trouve pour $\varphi_0$ l'équation

$$\begin{aligned}(9)\qquad &a_1(b_1+c_1-a_1)^2\cos^2\varphi_0\\ &+b_1(c_1+a_1-b_1)^2\sin^2\varphi_0-(a_1+b_1-c_1)^2=0,\end{aligned}$$

qui, par adjonction au premier membre de la quantité identiquement nulle

$$-4a_1b_1c_1\cos^2\varphi_0-4b_1c_1a_1\sin^2\varphi_0+4c_1a_1b_1,$$

devient

$$I_3(a_1\cos^2\varphi_0+b_1\sin^2\varphi_0-c_1)=0,$$

et nous vérifions ainsi toutes les circonstances annoncées *a priori*.

Nous voyons aussitôt que $A_2 A'_2$ joue par rapport à $C_2$ le rôle de $A_1 A'_1$ par rapport à $C_1$, la conique $C_0$ restant la même dans les deux cas. Si donc on pose

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned} a_2 &= \frac{1}{(b_1+c_1-a_1)^2},\\ b_2 &= \frac{1}{(c_1+a_1-b_1)^2},\\ c_2 &= \frac{1}{(a_1+b_1-c_1)^2};\end{aligned}\right.$$

on a, d'après les calculs qui précèdent, appliqués à $C_0$ et $C_2$,

$$C_4 \equiv (a_2^2+b_2^2+c_2^2-2b_2c_2-2c_2a_2-2a_2b_2)C_0+4a_2b_2c_2C_2,$$

et ceci fournit aussitôt la relation *nécessaire* pour les *hexagones* $P_6$, obtenue en annulant le coefficient de $C_0$ de façon que $C_4$ et $C_2$ coïncident. Cette relation se décompose en

$$(11)\quad \begin{aligned} &\left(\frac{1}{b_1+c_1-a_1}+\frac{1}{c_1+a_1-b_1}+\frac{1}{a_1+b_1-c_1}\right)\\ &\times\left(\frac{1}{c_1+a_1-b_1}+\frac{1}{a_1+b_1-c_1}-\frac{1}{b_1+c_1-a_1}\right)\\ &\times\left(\frac{1}{a_1+b_1-c_1}+\frac{1}{b_1+c_1-a_1}-\frac{1}{c_1+a_1-b_1}\right)\\ &\times\left(\frac{1}{b_1+c_1-a_1}+\frac{1}{c_1+a_1-b_1}-\frac{1}{a_1+b_1-c_1}\right)=0.\end{aligned}$$

Le premier facteur qui est symétrique en $a_1$, $b_1$, $c_1$ ne peut être que le facteur $I_3$ parasite, relatif au triangle; c'est ce que l'on vérifie sans peine en le rendant entier; on ne garde donc que les trois derniers qui expriment d'ailleurs que $C_3$ se réduit à l'un des sommets du triangle autopolaire.

Exprimons maintenant $C_4$ en $C_0$ et $C_1$, ce qui est facile en remplaçant $C_2$ par l'expression déjà obtenue :

on a

$$(12)\quad C_4 \equiv [a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 - 2b_2c_2 - 2c_2a_2 - 2a_2b_2 + 4a_2b_2c_2 I_3]C_0 + 16a_2b_2c_2a_1b_1c_1C_1.$$

La condition d'existence des *pentagones* est donc

$$(13)\quad a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 - 2b_2c_2 - 2c_2a_2 - 2a_2b_2 + 4a_2b_2c_2 I_3 = 0.$$

Nous savons que cette condition doit contenir le facteur parasite $I_3$ relatif aux $P_3$; cela a été signalé par la décomposition (11) de l'expression $2\Sigma b_2c_2 - \Sigma a_2^2$; on trouve ainsi les conditions définitives pour l'hexagone ou le pentagone

$$(11')\quad I'_6 \equiv [(a_1+b_1+c_1)^2 - 4(a_1^2+b_1c_1)] \times [(a_1+b_1+c_1)^2 - 4(b_1^2+c_1a_1)] \times [(a_1+b_1+c_1)^2 - 4(c_1^2+a_1b_1)] = 0,$$

$$(13')\quad I'_5 \equiv I'_6 + 4I_4^2 = 0.$$

La forme (12) de $C_4$ masque légèrement la condition d'identité de $C_4$ avec $C_0$, c'est-à-dire d'existence des quadrilatères $P_4$ : il suffit de rendre l'équation entière en $a_1$, $b_1$, $c_1$, ou de multiplier par

$$(b_1+c_1-a_1)^4(c_1+a_1-b_1)^4(a_1+b_1-c_1)^4$$

pour retrouver la condition $I_4 = 0$.

Pour obtenir la condition relative à l'*octogone* $P_8$, il suffit d'exprimer que $C_0$ et $C_2$ admettent des quadrilatères de Poncelet; on trouve ainsi

$$I_8 \equiv (b_2+c_2-a_2)(c_2+a_2-b_2)(a_2+b_2-c_2) = 0.$$

Ces exemples suffisent pour montrer la souplesse et la puissance de la méthode.

**6.** Indiquons maintenant comment par récurrence on trouvera les équations des coniques $C_2$, $C_3$, ..., $C_n$, ..., $C_{2n}$ ... successives. Prenons l'équation de la conique $C_n$ sous la forme

$$(C_n) \qquad \frac{x^2}{a_n} + \frac{y^2}{b_n} - \frac{z^2}{c_n} = 0;$$

alors le calcul fait au début du paragraphe 4 s'applique aussi bien au couple $(C_0, C_n)$ qu'au couple $(C_0, C_1)$ : posons donc

$$(14) \quad \left\{ \begin{aligned} \alpha_n &= b_n + c_n - a_n \\ \beta_n &= c_n + a_n - b_n \\ \gamma_n &= a_n + b_n - c_n \end{aligned} \right. \quad \text{ou} \quad \begin{aligned} 2a_n &= \beta_n + \gamma_n, \\ 2b_n &= \gamma_n + \alpha_n, \\ 2c_n &= \alpha_n + \beta_n. \end{aligned}$$

Les paramètres $\varphi_0$ et $\varphi_n$ sont liés par la relation

$$(15) \qquad \alpha_n \cos\varphi_0 \cos\varphi_n + \beta_n \sin\varphi_0 \sin\varphi_n - \gamma_n = 0,$$

l'équation de $A_n A'_n$ est

$$(16) \qquad \alpha_n x \cos\varphi_0 + \beta_n y \sin\varphi_0 - \gamma_n = 0,$$

l'équation ponctuelle de $C_{2n}$ est

$$(17) \qquad \alpha_n^2 x^2 + \beta_n^2 y^2 - \gamma_n^2 = 0.$$

(La condition de possibilité des $P_{4n}$ est $\alpha_n \beta_n \gamma_n = 0$.)
Pour abréger écrivons

$$(18) \quad \lambda_1 = \frac{\gamma_1}{\alpha_1}, \quad \mu_1 = \frac{\beta_1}{\alpha_1}, \quad \lambda_i = \frac{\gamma_i}{\alpha_i}, \quad \mu_i = \frac{\beta_i}{\alpha_i}.$$

On a donc

$$(19) \quad \left\{ \begin{aligned} &\cos\varphi_0 \cos\varphi_{n-1} + \mu_{n-1} \sin\varphi_0 \sin\varphi_{n-1} - \lambda_{n-1} = 0, \\ &\cos\varphi_{n-1} \cos\varphi_n + \mu_1 \sin\varphi_{n-1} \sin\varphi_n - \lambda_1 = 0, \end{aligned} \right.$$

et l'élimination de $\cos\varphi_{n-1}$, $\sin\varphi_{n-1}$ entre les équations (19) donne

$$(20)\qquad \begin{aligned}&[-\lambda_1\mu_{n-1}\sin\varphi_0+\lambda_{n-1}\mu_1\sin\varphi_n]^2\\ &+[-\lambda_{n-1}\cos\varphi_n+\lambda_1\cos\varphi_0]^2\\ &-[\mu_1\cos\varphi_0\sin\varphi_n-\mu_{n-1}\sin\varphi_0\cos\varphi_n]^2=0.\end{aligned}$$

Cette relation (20), malheureusement, est vérifiée, en parasite, par l'angle $\varphi_{n-2}$ ou $\varphi'_{n-2}$, au lieu d'être simplement vérifiée par $\varphi_n$ et $\varphi'_n$. Donc le premier membre de (20) est identique au produit

$$(21)\qquad \begin{aligned}&H_n[\cos\varphi_0\cos\varphi_n+\mu_{n-2}\sin\varphi_0\sin\varphi_n-\lambda_{n-2}]\\ &\times[\cos\varphi_0\cos\varphi_n+\mu_n\sin\varphi_0\sin\varphi_n-\lambda_n].\end{aligned}$$

Ordonnons donc les premiers membres de (20) ou (21) suivant les quantités suivantes, à l'exclusion de toute autre,

$$(22)\qquad \left\{\begin{array}{lll}\sin^2\varphi_0 & \sin^2\varphi_n & \sin^2\varphi_0\sin^2\varphi_n\\ \sin\varphi_0\sin\varphi_n & \cos\varphi_0\cos\varphi_n & \sin\varphi^0\cos\varphi_0\sin\varphi_n\cos\varphi_n\end{array}\right.$$

les termes du type de la première ligne (22) donnent

$$(23)\qquad \left\{\begin{aligned}\lambda_1^2+\lambda_{n-1}^2&=H_n[\lambda_{n-2}\lambda_n+1],\\ \mu_1^2+\mu_{n-1}^2&=H_n[\mu_{n-2}\mu_n+1],\\ \lambda_1^2\,\mu_{n-1}^2-\lambda_1^2-\mu_{n-1}^2&=-H_n,\\ \lambda_{n-1}^2\,\mu_1^2-\lambda_{n-1}^2-\mu_1^2&=-H_n.\end{aligned}\right.$$

Les termes de la seconde ligne (22) donnent

$$(24)\qquad \left\{\begin{aligned}2\lambda_1\mu_1\lambda_{n-1}\mu_{n-1}&=H_n[\lambda_{n-2}\mu_n+\mu_{n-2}\lambda_n],\\ 2\lambda_1\lambda_{n-1}&=H_n[\lambda_{n-2}+\lambda_n],\\ 2\mu_1\mu_{n-1}&=H_n[\mu_{n-2}+\mu_n].\end{aligned}\right.$$

Cela fait 7 équations pour les inconnues $\lambda_n$, $\mu_n$, $H_n$ à calculer en fonction des quantités $\lambda_0=1$, $\mu_0=1$, $\lambda_1$, $\mu_1$, ..., $\lambda_{n-1}$, $\mu_{n-1}$ supposées déjà calculées. Ces équations sont compatibles bien entendu; les deux dernières équations (23) donnent

$$1-H_n=(1-\lambda_1^2)(1-\mu_{n-1}^2)=(1-\lambda_{n-1}^2)(1-\mu_1^2).$$

Si l'on pose

$$(25)\qquad k^2 = \frac{1-\mu_1^2}{1-\lambda_1^2} = \frac{1-\mu_{n-1}^2}{1-\lambda_{n-1}^2} = \frac{c_1}{b_1}\,\frac{b_1-a_1}{c_1-a_1},$$

$k$ est une quantité connue et l'on a les formules, qui résolvent la question,

$$(26)\qquad \left\{\begin{aligned} H_n &= 1 - k^2(1-\lambda_1^2)(1-\lambda_{n-1}^2),\\ \lambda_n &= \frac{2\lambda_1\lambda_{n-1}}{H_n} - \lambda_{n-2},\\ \mu_n &= \frac{2\mu_1\mu_{n-1}}{H_n} - \mu_{n-2}. \end{aligned}\right.$$

La constance du rapport $\frac{1-\mu_n^2}{1-\lambda_n^2}$ signifie simplement que toutes les coniques $C_n$ contiennent les points communs à $C_0$ et $C_1$. Le calcul ainsi conduit montre que les équations de $C_n$ et $C_{2n}$ s'obtiennent ensemble; dans notre méthode, nous avons besoin de former l'identité

$$C_{2n} \equiv I_{2n+1}C_0 + I_{2n}C_1.$$

Or on a le droit d'écrire, en prenant

$$C_{2n} \equiv x^2 + \mu_n^2 y^2 - \lambda_n^2,$$

$$(27)\qquad \left\{\begin{aligned} 1 &= I_{2n+1} + \frac{I_{2n}}{a_1},\\ \mu_n^2 &= I_{2n+1} + \frac{I_{2n}}{b_1},\\ \lambda_n^2 &= I_{2n+1} + \frac{I_{2n}}{c_1}, \end{aligned}\right.$$

de sorte que

$$(28)\qquad \left\{\begin{aligned} &\left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{b_1}\right)I_{2n} = 1-\mu_n^2, \qquad a_1 - b_1\mu_n^2 = (a_1-b_1)I_{2n+1},\\ &\left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{c_1}\right)I_{2n} = 1-\lambda_n^2, \qquad a_1 - c_1\lambda_n^2 = (a_1-c_1)I_{2n+1}. \end{aligned}\right.$$

Ces relations montrent clairement que la condition $I_{2n} = 0$ s'obtient en cherchant le plus grand commun diviseur des expressions $\mu_n^2 - 1$ et $\lambda_n^2 - 1$, qui sont rationnelles en $a_1, b_1, c_1$ et l'égalant à zéro $\left(\text{on retrouve d'ailleurs ici la constante du rapport } \frac{1-\mu_n^2}{1-\lambda_n^2}\right)$. On remarque d'ailleurs que $C_{2n}$ ayant pour équation

$$x^2 + \mu_n^2 y^2 - \lambda_n^2 = 0,$$

il y a à étudier les quatre combinaisons

$$\begin{array}{ll} \lambda_n = \mu_n = 1, & \\ \lambda_n = \quad 1, & \mu_n = -1, \\ \lambda_n = -1, & \mu_n = \quad 1, \\ \lambda_n = -1, & \mu_n = -1. \end{array}$$

Mais l'équation (16) obtenue pour $A_n A'_n$ ou

$$x \cos\varphi_0 + \mu_n y \cos\varphi_0 - \lambda_n = 0$$

montre que la première combinaison est à rejeter, car on aurait alors $A_n = A'_n = A_0$ et il s'agirait d'un $P_n$ et non pas d'un $P_{2n}$. La combinaison $\lambda_n = -1$, $\mu_n = 1$ par exemple montre que $A_n A'_n$ est tangente au point $\varphi_0 + \pi$ à $C_0$ : c'est le point diamétralement opposé à $A_0$ : on pourra donc se borner à chercher le plus grand commun diviseur de $1 + \lambda_n$ et $\mu_n - 1$ ; une permutation circulaire effectuée ensuite sur $a_1$, $b_1$, $c_1$ donnera les deux autres diviseurs analogues ; en égalant chacun à zéro, on a l'une des séries $C_1$ admettant avec $C_0$ $\infty^1$ polygones $P_{2n}$. On aura de même pour $P_{2n+1}$ à égaler à zéro le plus grand commun diviseur de $a_1 - b_1 \mu_n^2$, et $a_1 - c_1 \lambda_n^2$ ou simplement le quotient $\frac{a_1 - b_1 \mu_n^2}{a_1 - b_1}$.

7. Ici se place la remarque simple : si $n = pq$, l'existence de $P_n$ pour $C_0$ et $C_1$ revient à l'existence de $P_p$ pour $C_0$ et $C_q$ ; autrement dit, si

$$f_p(a_1, b_1, c_1) = 0 \tag{29}$$

est la condition d'existence des $P_p$ pour $C_0$ et $C_1$, la condition

$$f_p(a_q, b_q, c_q) = 0 \tag{30}$$

est la condition d'existence des $P_{pq}$ pour $C_0$ et $C_1$. Nous avons précisément, au paragraphe précédent, montré comment $a_q, b_q, c_q$ s'obtiennent rationnellement au moyen de $a_1, b_1, c_1$; dans l'expression (30) on remplace $a_q, b_q, c_q$ par ces expressions en $a_1, b_1, c_1$; c'est cette opération que j'appelle substitution ($a_1, b_1, c_1$ ; $a_q, b_q, c_q$). Si donc on effectue la décomposition de l'entier $n$ en facteurs premiers

$$n = p^P q^Q r^R \ldots,$$

on pourra partir par exemple de l'expression

$$f_p(a_1, b_1, c_1)$$

et l'on y effectuera $P - 1$ fois successivement la substitution ($a_1, b_1, c_1$ ; $a_p, b_p, c_p$), puis dans le résultat obtenu Q fois la substitution ($a_1, b_1, c_1$ ; $a_q, b_q, c_q$) et ainsi de suite.

8. Appliquons ce qui précède à la recherche des conditions d'existence de $P_n$ et $P_{2n}$. La relation relative aux $P_n$

$$f_n(a_1, b_1, c_1) = 0 \tag{31}$$

sera remplacée pour les $P_{2n}$ par la condition

$$f_n\left[\frac{1}{(b_1 + c_1 - a_1)^2}, \frac{1}{(c_1 + a_1 - b_1)^2}, \frac{1}{(a_1 + b_1 - c_1)^2}\right] = 0 \tag{32}$$

ou du moins la relation (32) rendue entière, débarrassée du facteur parasite éventuel $f_n(a_1, b_1, c_1)$ relatif à un $P_n$ parcouru deux fois est la condition cherchée pour les $P_{2n}$.

Écrivons donc les formules de substitution

$$(33)\quad \begin{cases} a_1 = a^2, & b_1 = b^2, & c_1 = c^2, \\ a = \dfrac{1}{B_1+C_1-A_1}, & b = \dfrac{1}{C_1+A_1-B_1}, & c = \dfrac{1}{A_1+B_1-C_1}, \end{cases}$$

où j'écris $A_1$, $B_1$, $C_1$ pour plus de clarté. Je considère $(a_1, b_1, c_1)$, $(a, b, c)$, $(A_1, B_1, C_1)$ comme des coordonnées ponctuelles homogènes; la transformation *plane* $(A_1, B_1, C_1 ; a_1, b_1, c_1)$ n'est pas birationnelle, car au point $(A_1, B_1, C_1)$ correspond bien rationnellement un seul point $(a_1, b_1, c_1)$, mais au point $(a_1, b_1, c_1)$ correspond quatre points $(A_1, B_1, C_1)$, $(A'_1, B'_1, C'_1)$, $(A''_1, B''_1, C''_1)$, $(A'''_1, B'''_1, C'''_1)$ que nous pouvons supposer correspondre aux points intermédiaires respectifs $(a, b, c)$, $(-a, b, c)$, $(a, -b, c)$, $(a, b, -c)$.

On a donc

$$(34)\quad \begin{cases} 2A_1 = \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}, & 2A'_1 = \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}, \\ 2B_1 = \dfrac{1}{c} + \dfrac{1}{a}, & 2B'_1 = \dfrac{1}{c} - \dfrac{1}{a}, \\ 2C_1 = \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}, & 2C'_1 = \dfrac{1}{b} - \dfrac{1}{a}, \end{cases}$$

d'où l'on conclut entre les points $(A_1, B_1, C_1)$, $(A'_1, B'_1, C'_1)$ les formules birationnelles involutives

$$(35)\quad \begin{cases} A'_1 = A_1, & B'_1 = A_1 - C_1, & C'_1 = A_1 - B_1, \\ A_1 = A'_1, & B_1 = A'_1 - C'_1, & C_1 = A'_1 - B'_1. \end{cases}$$

Nous allons trouver une simplification considérable dans le cas où l'entier $n$ est impair. Mettons en évidence la parité et écrivons la condition relative aux $P_{2n+1}$, soit

$$(36)\qquad f_{2n+1}(a_1, b_1, c_1) = 0.$$

On a d'abord ce résultat : l'expression $f_{2n+1}(a_1, b_1, c_1)$

est symétrique en $a_1$, $b_1$, $c_1$, et de plus l'équation

(37) $$f_{2n+1}(a^2, b^2, c^2) = 0$$

se décompose *rationnellement en quatre facteurs*, dont l'un, rendu entier en $A_1$, $B_1$, $C_1$, reproduit $f_{2n+1}(A_1, B_1, C_1)$; ce facteur est symétrique en $a, b, c$; nous le désignerons par $R_{2n+1}(a, b, c)$ et il correspond à un $P_{2n+1}$ parcouru deux fois ; on a l'identité

(38) $$\begin{aligned} f_{2n+1}(a^2, b^2, c^2) \equiv {} & \varepsilon R_{2n+1}(a, b, c) \quad R_{2n+1}(-a, b, c), \\ & \times R_{2n+1}(a, -b, c)\ R_{2n+1}(a, b, -c), \end{aligned}$$

où $\varepsilon$ est un facteur numérique ; chacun des facteurs $R_{2n+1}(-a, b, c)$ et analogues correspond à l'une des trois séries de $P_{4n+2}$ qui se différentient l'une de l'autre par le choix du sommet du triangle autopolaire T où passent les diagonales de $P_{4n+2}$ joignant les sommets opposés. Exemple :

$$f_3(a_1, b_1, c_1) \equiv a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 - 2b_1c_1 - 2c_1a_1 - 2a_1b_1,$$
$$f_3(a^2, b^2, c^2) \equiv -(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c).$$

On peut encore remarquer qu'en raison de la symétrie de $R_{2n+1}$ en $a$, $b$, $c$ les trois facteurs $R_{2n+1}(-a, b, c)$, $R_{2n+1}(a, -b, c)$ ou $R_{2n+1}(a, b, -c)$ se déduisent l'un de l'autre par permutations circulaires.

D'autre part $R_{2n+1}(a, b, c)$ exprimé en $A_1$, $B_1$, $C_1$ donne la relation $f_{2n+1}(A_1, B_1, C_1) = 0$, donc

$$R_{2n+1}(-a, b, c)$$

donne de même $f_{2n+1}(A'_1, B'_1, C'_1) = 0$ : donc, en vertu de (35), *l'équation*

(39) $$f_{2n+1}(a_1, a_1 - c_1, a_1 - b_1) = 0$$

*est la condition nécessaire et suffisante d'existence d'une série de* $P_{4n+2}$ *si*

$$f_{2n+1}(a_1, b_1, c_1) = 0$$

*est la condition nécessaire et suffisante d'existence des* $P_{2n+1}$.

En vertu de la symétrie, écrire

$$f_{2n+1}(a_1,\ a_1 - b_1,\ a_1 - c_1)$$

revient au même qu'écrire

$$f_{2n+1}(a_1,\ a_1 - c_1,\ a_1 - b_1).$$

Nous avons ainsi, dans le cas où $n$ est impair, considérablement abrégé les calculs : sous la forme (32), il y a en effet une décomposition en quatre facteurs à effectuer, nous avons montré comment on trouve chacun d'eux. La vérification est aisée à faire pour le triangle et l'hexagone [voir formules (11) et (11')].

Dans le cas où l'on part d'un polygone $P_{2n}$, le procédé de simplification ne s'applique plus ; il faut revenir à la formule (32) ; nous supposons que l'équation

$$f_{2n}(a_1,\ b_1,\ c_1) = 0 \tag{40}$$

soit l'une des conditions, *irréductible*, d'existence d'un $P_{2n}$ pour lequel les diagonales joignant deux sommets opposés passent par *un* sommet déterminé de T ; l'équation

$$f_{2n}\left[\frac{1}{(b_1 + c_1 - a_1)^2},\ \frac{1}{(c_1 + a_1 - b_1)^2},\ \frac{1}{(a_1 + b_1 - c_1)^2}\right] = 0 \tag{41}$$

*ne se décompose plus ;* c'est la condition nécessaire et suffisante d'existence de $P_{4n}$, relatifs au même sommet du triangle conjugué commun T. La vérification est facile à faire : pour le quadrilatère, on a eu, par exemple,

$$b_1 + c_1 - a_1 = 0,$$

d'où, pour l'octogone, la relation

$$\frac{1}{(c_1 + a_1 - b_1)^2} + \frac{1}{(a_1 + b_1 - c_1)^2} - \frac{1}{(b_1 + c_1 - a_1)^2} = 0,$$

ou si l'on préfère

$$b^2 + c^2 - a^2 = 0$$

qui est indécomposable. (*A suivre.*)