Nouvelles annales de mathématiques

Raoul Bricard

Sur les théorèmes vectorielles et sur la cinématique (questions de terminologie)

Nouvelles annales de mathématiques 5e série, tome 3 (1924), p. 24-34

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1924_5_3__24_1>

[V1a]

SUR LES THÉORIES VECTORIELLES ET SUR LA CINÉMATIQUE (QUESTIONS DE TERMINOLOGIE);

PAR RAOUL BRICARD.

1. La théorie des systèmes de vecteurs, fondement de la statique et de la cinématique, fait aujourd'hui

partie du programme de la classe de Mathématiques spéciales. Elle est donc couramment enseignée. Mais la terminologie en usage ne me paraît pas toujours heureuse, et les notations ne sont pas aussi fixées qu'elles devraient l'être. Je me propose d'indiquer ici les façons de dire et d'écrire auxquelles je m'arrêterai volontiers. Comme il convenait, j'ai cherché à être le moins original possible, s'agissant de choisir plutôt que d'innover.

Je signalerai aussi ce qu'il est bon, selon moi, d'introduire du *Calcul vectoriel* proprement dit dans l'enseignement de la statique, et cela dès le début. Il semble qu'on professe chez nous une certaine méfiance à l'égard de ce calcul, probablement par crainte d'un symbolisme dont nous n'avons pas le goût, et dont il faut convenir que certains ont abusé. Il n'en est pas moins vrai qu'il est des conceptions qui s'imposent aujourd'hui à tout mathématicien. Il faut penser à un vecteur *en soi* avant de penser à ses composantes X, Y, Z. Il faut rattacher le moment à un produit vectoriel et non pas le produit vectoriel à un moment. Nous sommes certainement sous ce rapport en retard sur l'étranger [1].

Comme le reconnaîtront les lecteurs à qui sont familiers les *Éléments de calcul vectoriel*, de MM. Burali-Forti et Marcolongo (traduction française de Lattès), ce qui suit se ressent de leur influence.

Je profiterai de l'occasion pour dire quelques mots sur le langage de la cinématique, bien que le sujet soit différent.

---

(1) Un pas important vient d'être fait avec le beau livre de M. Georges Bouligand, *Leçons de Géométrie vectorielle* (Paris, Vuibert, 1924). Mais cet ouvrage d'une haute portée ne s'adresse pas à des débutants.

2. Au commencement, il faut insister, plus qu'on ne le fait toujours, sur la différence profonde de nature entre le *vecteur libre* et le *vecteur glissant*. Ce sont des êtres tout à fait distincts, à tel point que si j'osais, je voudrais prévenir toute confusion entre eux en désignant le second par le terme de *glisseur* (ce qui, en outre, serait plus concis). Pour ne pas aller trop loin, conservons les expressions composées qui ne diffèrent que par les épithètes. On peut supprimer celles-ci quand on ne redoute pas de méprise, mais il faut être prudent.

Pour définir les vecteurs des deux sortes, le mieux me paraît être de partir de la notion de *segment orienté*, qui ne présente pas de difficulté. Le segment orienté d'origine A et d'extrémité B sera désigné par $\overrightarrow{AB}$. On définit à la manière ordinaire l'équipollence de deux segments orientés. Cela fait, convenons d'écrire de la manière suivante une telle équipollence :

(1) $$\text{Vecteur libre de } \overrightarrow{AB} = \text{vecteur libre de } \overrightarrow{CD}.$$

On est ainsi conduit à attacher à tout segment orienté une certaine fonction de ce segment, son *vecteur libre*, fonction qui prend la même valeur pour tous les segments équipollents au premier et pour ceux-là seulement.

Un vecteur libre, étant une abstraction, ne peut être figuré : on ne peut en figurer qu'un *segment orienté représentatif*, ce segment orienté pouvant d'ailleurs être remplacé par un segment orienté équipollent quelconque. De même, on ne peut figurer une longueur *en soi :* on ne peut que figurer un segment ayant cette longueur, ce segment pouvant être remplacé par un segment quelconque égal (*congruent*, dirait-on à l'étranger), au sens de la géométrie élémentaire. Pour noter le vecteur libre du segment orienté $\overrightarrow{AB}$, on peut employer la notation (1), raccourcie si l'on veut en Vect $\overrightarrow{AB}$, mais il faut se garder d'écrire $\overrightarrow{AB}$ tout court, parce que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ serait susceptible d'interprétations diverses.

Je crois avantageux d'introduire tout de suite la notation de Grassmann et d'autres auteurs :

$$\text{Vect}\ \overrightarrow{AB} = B - A,$$

le vecteur libre apparaissant ainsi comme la différence symbolique de deux points. Cette notation se justifie par le fait qu'en traitant comme une égalité algébrique l'égalité

$$B - A = C - D,$$

on en tire les conséquences exactes

$$A - B = D - C, \qquad B - C = A - D.$$

Enfin on notera souvent un vecteur libre par une lettre unique, en employant un caractère spécial tel que $\mathbf{u}$ (*égyptienne*). L'égalité

$$B - A = \mathbf{u}$$

étant traitée comme une égalité algébrique, on en tire

$$B = A + \mathbf{u},$$

d'un emploi commode. On a fréquemment en effet, étant donné un point A, à considérer le point B, extrémité d'un segment orienté ayant A pour origine et $\mathbf{u}$ pour vecteur libre. On dira plus brièvement : le point $A + \mathbf{u}$.

Le *module* d'un vecteur $\mathbf{u}$ est le nombre essentiellement positif qui mesure la longueur d'un segment orienté de vecteur **u**, l'unité de longueur étant choisie. On le note mod **u**.

Les expressions *vecteurs libres parallèles*, *vecteurs libres parallèles et de même sens*, *vecteurs libres parallèles à une droite*, etc. se comprennent d'elles-mêmes.

3. Le *support* d'un segment orienté est la droite, indéfiniment prolongée, qui contient ce segment. On dit souvent qu'un *vecteur glissant* est un segment orienté, deux segments orientés équipollents et de même support n'étant pas considérés comme distincts. Il me paraît plus net de dire qu'*un vecteur glissant est le système formé d'une droite* D *et d'un vecteur libre* **u** *parallèle à* D. On a ainsi une définition nominale.

Un vecteur glissant ne peut être figuré que par un segment orienté représentatif $\overrightarrow{AB}$, celui-ci pouvant être remplacé par l'un quelconque des segments orientés équipollents et de même support. Dans bien des cas, on peut sans inconvénient désigner par la même notation $\overrightarrow{AB}$ le segment orienté et le vecteur glissant qu'il représente. Une autre notation, à laquelle conduit immédiatement la définition, est (D, **u**). Elle est meilleure que la première, parce qu'elle ne fait intervenir que des éléments absolus du vecteur glissant. Mais la question de commodité passe souvent avant la logique. C'est pourquoi je préconiserai comme fréquemment avantageuse une troisième notation : A**u**, **u** étant le vecteur libre du vecteur glissant, et A l'origine d'un segment orienté représentatif quelconque. On a donc

$$A\mathbf{u} = A'\mathbf{u},$$

si A′ est un point quelconque du support de A**u**.

4. Je ne rappellerai pas les définitions bien connues de la *somme* de plusieurs vecteurs libres, du *produit scalaire* et du *produit vectoriel* de deux vecteurs libres. Le premier a depuis longtemps droit de cité dans l'enseignement, mais on y parle beaucoup plus timidement du produit vectoriel, je ne sais pourquoi. Les notations les plus recommandables me paraissent être celles de Burati-Forti et Marcolongo, $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ et $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$. J'aime mieux $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ que $\mathbf{u} . \mathbf{v}$, employé par M. G. Bouligand dans ses récentes *Leçons de Géométrie vectorielle*. Le point est un peu maigre. Il semble humilier le produit scalaire devant le produit vectoriel, et il n'y a pas de raison pour cela.

Je n'estime pas qu'en Spéciales il faille pousser jusqu'à l'étude du *double produit vectoriel* $\mathbf{u} \wedge (\mathbf{v} \wedge \mathbf{w})$ et du *produit mixte* $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \wedge \mathbf{w})$. Je dirai toutefois, puisque l'occasion s'en présente, qu'il me paraît plus simple d'écrire ce dernier produit $\mathbf{uvw}$, en supprimant les signes. On en a le droit à cause de

$$\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) \times \mathbf{w}.$$

5. Le *moment* d'un vecteur glissant $A\mathbf{u}$ par rapport à un point O est le vecteur libre $(A - O) \wedge \mathbf{u}$. Sans doute, on peut le considérer comme un vecteur glissant dont le support passe par le point O, et c'est même plus naturel *a priori*, mais le développement ultérieur de la théorie est plus souple si l'on considère le moment comme un vecteur libre.

6. Un *système de vecteurs glissants* peut être nommé plus brièvement un *torseur*, ce que plusieurs font déjà. N'oublions pas que la parole a une puissance créatrice, et qu'un mot unique est plus propre qu'une périphrase à faire concevoir l'individualité d'un être. Aurions-nous

une idée aussi nette de l'ellipse, si nous nous obstinions à l'appeler *le lieu des points tels que la somme de leurs distances*, etc.? Or un torseur, qui se présente comme système de certains éléments, se comporte bien comme un être synthétique, à la notion duquel il importe de parvenir. On peut modifier à l'infini sa constitution intime, sans qu'il cesse d'être le même torseur.

Un torseur, constitué par les vecteurs glissants $A_1\mathbf{u}_1$, $A_2\mathbf{u}_2$, ..., $A_n\mathbf{u}_n$, sera désigné par la notation

$$\mathfrak{T} = A_1\mathbf{u}_1 + A_2\mathbf{u}_2 + \ldots + A_n\mathbf{u}_n = \sum_1^n A_i\mathbf{u}_i,$$

c'est-à-dire qu'il sera considéré comme *somme de ses vecteurs glissants*. De la sorte, le torseur formé par la réunion des torseurs $\mathfrak{T}$ et $\mathfrak{T}'$ sera désigné par $\mathfrak{T}+\mathfrak{T}'$.

On appellera *torseur opposé à* $\mathfrak{T}$ et l'on désignera par $-\mathfrak{T}$ le torseur $\Sigma A_i(-\mathbf{u}_i)$.

Le *moment* d'un torseur par rapport à un point est la somme des moments individuels de ses vecteurs glissants par rapport à ce point. On dit habituellement : *moment résultant*. On peut supprimer l'épithète.

Le vecteur $\Sigma\mathbf{u}_i$, désigné comme *résultante générale*, *somme géométrique* du torseur, peut être appelé plus simplement le *vecteur* (libre) du torseur.

Un *couple* est un torseur de vecteur nul constitué par deux vecteurs glissants. Il ne faut pas dire que les supports de ceux-ci sont nécessairement distincts, car alors un couple nul ne serait pas un couple.

Un torseur de vecteur nul a même moment par rapport à tout point de l'espace. On peut donc parler d'une manière absolue du *moment* d'un tel torseur, en particulier du *moment* d'un couple. Ne pas dire l'*axe* d'un couple. C'est un abus de langage.

Quand deux torseurs ont même moment par rapport à un même point de l'espace, quel que soit ce point, on dit qu'ils sont *équivalents*. Je préfère dire *égaux*, parce que l'équivalence des torseurs jouit des propriétés de l'égalité. On écrira $\mathfrak{T} = \mathfrak{T}'$. De même un torseur *équivalent à zéro* sera dit plus simplement *torseur nul*, et l'on écrira $\mathfrak{T} = 0$.

Il est aisé de voir que l'on peut traiter comme des égalités algébriques les égalités entre torseurs. Ainsi l'on a

$$\mathfrak{T} + (-\mathfrak{T}) = 0.$$

De $\mathfrak{T}_1 + \mathfrak{T}_2 = \mathfrak{T}_3 + \mathfrak{T}_4$, on a le droit de tirer

$$\mathfrak{T}_1 = \mathfrak{T}_3 - \mathfrak{T}_2 + \mathfrak{T}_4, \text{ etc.}$$

Le torseur $\mathfrak{T} = \Sigma A_i \mathbf{u}_i$ a deux *invariants :* 1° un *invariant vectoriel*, qui est son vecteur $\mathbf{u} = \Sigma \mathbf{u}_i$; 2° un *invariant scalaire*, appelé son *automoment*, qui est le produit scalaire $\mathbf{m} \times \mathbf{u}$, $\mathbf{m}$ étant le moment de T par rapport à un point O quelconque.

Le problème essentiel de la théorie des torseurs est d'en *opérer la réduction*, c'est-à-dire de trouver un torseur, constitué aussi simplement que possible, qui lui soit égal. On sait qu'il existe ∞^4 réductions à un système de deux vecteurs glissants et ∞^2 réductions à un vecteur glissant et à un couple. La *réduction canonique* est telle que le moment du couple soit parallèle au vecteur du torseur, et elle n'est possible que d'une manière. Le support du vecteur glissant qui intervient dans la réduction canonique est appelé en général l'*axe central* du torseur. Je vois un pléonasme dans *axe central*, et il me semble que le terme d'*axe* sans plus est suffisant.

7. En cinématique, la première distinction à faire est

celle du *déplacement* et du *mouvement*. Le *déplacement* est l'opération théorique qui fait correspondre à une position d'un solide une autre position, sans qu'on ait égard aux positions intermédiaires. Le *mouvement* est l'opération physique dont le résultat est un *déplacement*. L'étude des déplacements n'est qu'un chapitre de la géométrie pure. Elle ne fait pas intervenir la considération du temps.

Dans ses ouvrages, Mannheim appliquait le terme de *déplacement* aux mouvements, en indiquant par là qu'il ne s'occupait que de leurs propriétés géométriques, et ne parlait jamais ni de vitesse ni d'accélération. Il est clair que la distinction entre le mouvement et le déplacement, au sens de Mannheim, est secondaire : car ce que Mannheim étudiait, c'était une suite de positions dépendant d'une manière continue d'une variable, et l'on peut toujours appeler t cette variable sans rien changer à la nature des choses.

La théorie des déplacements tend à prendre une forme classique. On définit d'abord un certain nombre de déplacements fondamentaux, dont les *produits* donnent tous les déplacements possibles.

Ces déplacements fondamentaux sont la *translation*, la *rotation*, le *renversement*, le *vissage*. Les deux premiers termes sont acceptés par tous. Le *renversement* est la rotation de 180° autour d'une droite. Darboux adoptait cette expression dans ses premiers écrits, par exemple dans une note additionnelle aux *Leçons de Cinématique* de M. Kœnigs. Dans ses *Principes de Géométrie analytique*, parus à la fin de sa vie, il l'a changée, pour des raisons que j'ignore, en celle de *retournement*. Je crois qu'il a eu tort, je dirai pourquoi tout à l'heure.

Le *vissage* porte aussi le nom de *déplacement héli-*

coïdal ou de *déplacement de verrou*. Je préfère l'expression la plus concise.

A côté du *déplacement*, opération générale qui fait passer d'une figure à une figure *directement* égale, il faut considérer l'opération générale qui fait passer d'une figure à une figure *inversement* égale. Le terme de *retournement*, qui apparaît pour la première fois, si je ne me trompe, dans le *Cours de Géométrie de l'École Polytechnique* de M. d'Ocagne, me semble excellent, et c'est pour cela que je conseillerai d'employer *renversement* dans le sens indiqué plus haut. Il suffit d'ailleurs de remarquer que lorsqu'on est *renversé* par une automobile, si grave que soit l'accident, on n'en sent pas pour cela son cœur passer de gauche à droite; tandis qu'en *retournant* un gant de la main droite, on en fait un gant de la main gauche.

Un retournement particulier d'une grande importance est la *symétrie plane* ou symétrie par rapport à un plan. On dit aussi *inversion plane*. J'aime autant la première expression.

Les mouvements fondamentaux sont le *mouvement de translation*, le *mouvement de rotation*, le *mouvement de vissage*. On peut dire simplement *translation*, *rotation* et *vissage*, c'est-à-dire désigner ces mouvements de la même manière que les déplacements correspondants, quand cette synonymie n'entraîne pas de confusions, ce qui est le cas ordinaire.

Une exposition bien comprise de la cinématique (théorique ou appliquée) doit être dominée par l'idée de mouvement relatif. Sans aborder la question métaphysique de savoir si le mouvement absolu est concevable ou non, il est incontestable que nous ne pouvons étudier que les mouvements relatifs de divers solides en présence A, B, C, ... Il est commode de désigner ces mouvements par des notations telles que $\left(\frac{A}{B}\right)$, $\left(\frac{C}{B}\right)$, ..., et d'écrire symboliquement

$$\left(\frac{C}{A}\right) = \left(\frac{C}{B}\right)\left(\frac{B}{A}\right),$$

pour exprimer que le premier de ces mouvements résulte de la composition des deux autres. Remarquer qu'on peut écrire aussi bien

$$\left(\frac{C}{A}\right) = \left(\frac{B}{A}\right)\left(\frac{C}{B}\right),$$

car la composition de deux mouvements, phénomènes simultanés, est commutative, à la différence de la multiplication de deux déplacements, opérations successives (on reconnaît même, en y réfléchissant, que la composition des mouvements n'a rien de commun avec celle des déplacements, et qu'il est pour cette raison préférable d'employer le terme de *multiplication* dans ce dernier cas).

Les deux mouvements $\left(\frac{A}{B}\right)$ et $\left(\frac{B}{A}\right)$ sont souvent dits *inverses* l'un de l'autre. Je crois qu'il vaut mieux dire : *réciproques*. Le mouvement *inverse* de celui d'un train qui est allé de Paris à Marseille est celui qui le ramène de Marseille à Paris. Le mouvement *réciproque* est celui de la voie, par rapport à un voyageur qui se croit immobile.

J'aurais pu, dans cet article, invoquer diverses autorités à l'appui de quelques expressions peu répandues. Je n'en ai rien fait, pour mettre le jugement du lecteur plus à son aise, et aussi pour m'épargner des recherches ennuyeuses. Je n'ai d'ailleurs jamais estimé que le nom de la Bruyère donnât du prestige à « ... qu'il y a des hommes et qui pensent ».