Nouvelles annales de mathématiques

Georges Valiron

Sur la décomposition en facteurs de $\sin \pi z$ et de $\Gamma(z)$

Nouvelles annales de mathématiques 5e série, tome 3 (1924), p. 241-245

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1924_5_3__241_0>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1924, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques

http://www.numdam.org/

SUR LA DÉCOMPOSITION EN FACTEURS DE $\sin \pi z$ ET DE $\Gamma(z)$;

PAR M. GEORGES VALIRON

(Strasbourg).

La méthode suivante me paraît particulièrement simple pour obtenir la décomposition en facteurs de $\sin(\pi z)$ et de $\Gamma(z)$ comme application de la théorie des fonctions de variable complexe, et est peut-être nouvelle.

1. Le produit infini

$$G(z) = \pi z \prod_{1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)$$

admet les zéros de $\sin \pi z$ et vérifie comme cette fonction l'égalité fonctionnelle

$$f(z+1) = -f(z). \tag{1}$$

Considérons la fonction

$$H(z) = \frac{1}{G(z)} - \frac{1}{\sin \pi z},$$

elle vérifie l'égalité (1), donc est périodique, de période 2. C'est une fonction entière car, pour $z = 0$, les résidus des deux termes de la différence sont les mêmes, $H(z)$ est régulière pour $z = 0$, donc pour $z = n$ d'après (1). Je dis que $H(z)$ est bornée dans tout le plan. Si l'on pose $z = x + iy$, il suffit de le montrer pour $-1 \leqq x \leqq 1$ et $|y| \geqq 1$. Or on a alors

$$\left| 1 - \frac{z^2}{n^2} \right| \geqq \frac{n^2 + y^2 - x^2}{n^2} \geqq 1,$$

donc

$$\left| \frac{1}{G(z)} \right| \leqq \frac{1}{\pi |z|}.$$

Les formules d'Euler montrent d'ailleurs que $(\sin \pi z)^{-1}$ tend vers zéro lorsque $|y|$ croît indéfiniment. $H(z)$ est donc bornée dans tout le plan, donc constante d'après le théorème de Liouville et cette constante est nulle puisque $H(z)$ tend vers zéro lorsque $|y|$ croît indéfiniment. L'identité de $\sin \pi z$ et $G(z)$ est ainsi établie.

2. Supposons connu que la fonction $\Gamma(z)$ de $z = x + iy$, définie pour $x > 0$ par l'intégrale d'Euler

$$(2) \qquad \Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t}\, dt,$$

est holomorphe pour $x > 0$ et vérifie l'égalité fonctionnelle

$$(3) \qquad f(z+1) = z f(z)$$

qui permet de prolonger $\Gamma(z)$ dans tout le plan et montre que cette fonction est méromorphe et a pour pôles simples les points $0, -1, -2, \ldots$ (*voir* Goursat, t. II, p. 275). L'égalité (3) montre en outre que le résidu du pôle $-n$ est $\frac{(-1)^n}{n!}$.

La relation des compléments

$$(4) \qquad \Gamma(z)\Gamma(1-z) - \frac{\pi}{\sin \pi z} = 0$$

est alors bien aisée à obtenir. Désignons par $g(z)$ le premier membre de cette égalité, c'est une fonction entière car les résidus des pôles dans les deux termes de la différence sont égaux; en outre, d'après la relation (3), cette fonction est impaire et vérifie la relation (1), elle est donc aussi périodique de période 2. Montrons qu'elle est bornée dans tout le plan, il suffit de le montrer pour $1 \leqq x \leqq 2$ et $|y| \geqq 1$. C'est connu pour $\frac{\pi}{\sin \pi z}$ et, eu égard à la relation (3), il suffit de le vérifier pour $\Gamma(z)$. Or en remplaçant z par x dans (2) on voit que dans ces conditions

$$|\Gamma(z)| < \Gamma(1) + \Gamma(2) = 2;$$

$g(z)$ est bornée, donc constante, et impaire, donc identiquement nulle, la relation (4) est démontrée.

3. La relation (4) montre que $\Gamma(z)$ ne s'annule jamais puisque sa valeur est $n!$ pour le pôle $z = n+1$ de $\Gamma(1-z)$. $\frac{1}{\Gamma(z)}$ est donc une fonction entière dont les zéros sont les points $0, -1, -2, \ldots$. Soit

$$P(z) = z \prod_{1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}}$$

le produit de Weierstrass formé avec ces zéros, c'est une fonction entière qui ne vérifie pas la relation (3), on reconnaît aisément que l'on a seulement

$$z P(z+1) = P(z) e^{-C},$$

où C est la constante d'Euler

$$C = \lim_{n=\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \log n\right) = \lim_{n=\infty} C_n.$$

Considérons alors la fonction

$$(5) \qquad W(z) = e^{Cz} P(z),$$

$\dfrac{1}{W(z)}$ satisfait à la condition (3) et l'on a, en considérant le second membre de (5) comme la limite du produit des m premiers termes de $P(z)$ par $e^{C_m z}$,

$$(6) \qquad W(z) = \lim_{m=\infty} \frac{z(z+1)\ldots(z+m)}{1.2\ldots m m^z}.$$

Le produit $W(z)\Gamma(z)$ est une fonction entière périodique, de période 1, elle est égale à 1 pour $z = 1$, donc aussi pour $z = n$ entier quelconque; la fonction

$$K(z) = \frac{W(z)\Gamma(z) - 1}{\sin \pi z}$$

est donc encore une fonction entière admettant la période 1. Montrons qu'elle est bornée dans tout le plan. Il suffit de le voir pour $0 \leqq x \leqq 1$ et $|y| > 1$. On sait déjà que

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(1+z)}{z}$$

a un module moindre que 2, pour $W(z)$ la formule (6) dans laquelle

$$\left|\frac{n+z}{n}\right| = \sqrt{\left(1+\frac{x}{n}\right)^2 + \frac{y^2}{n^2}} \leqq \left(1+\frac{x}{n}\right)\left(1+\frac{y^2}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

donne

$$|W(z)| \leqq \frac{W(x)}{x}\, 2\, |y| \prod_1^\infty \left(1+\frac{y^2}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqq 2\,\frac{W(x)}{\pi x}\, |y|\, [|\sin(iy\pi)|]^{\frac{1}{2}} < M|y|\, e^{\frac{\pi}{2}|y|},$$

M étant fixe, enfin

$$|\sin \pi z| > \frac{1}{3} e^{\pi |y|}.$$

$K(z)$ est donc bornée et par suite constante et tend vers zéro lorsque $|y|$ croît indéfiniment, $K(z)$ est identiquement nulle. $W(z)$ est identique à $\frac{1}{\Gamma(z)}$, l'expression (5) de $\frac{1}{\Gamma(z)}$ est celle de Weierstrass, l'égalité (6) est celle de Gauss.