Solutions de questions proposées

Nouvelles annales de mathématiques 5e série, tome 3 (1924), p. 238-240

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1924_5_3__238_1>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

2409.

(1919, p. 160.)

Si deux triangles sont à la fois homologiques et orthologiques, les deux centres d'orthologie sont sur la perpendiculaire abaissée du centre d'homologie sur l'axe d'homologie.

Application. — *Soient* M *et* M′ *deux points inverses par rapport à un triangle* ABC, μ_1, μ_2, μ_3; μ'_1, μ'_2, μ'_3 *leurs projections sur* BC, CA, AB; *si les droites* $A\mu_1$, $B\mu_2$, $C\mu_3$ *et* $A\mu'_1$, $B\mu'_2$, $C\mu'_3$ *sont concourantes, elles se coupent sur* MM′ *et les axes d'homologie des triangles* ABC, $\mu_1\mu_2\mu_3$ *et* ABC, $\mu'_1\mu'_2\mu'_3$ *sont perpendiculaires à* MM′.

R. Bouvaist.

Solution

Par M. R. B.

On obtient une démonstration rapide par des considérations de géométrie dans l'espace. Partons de ce théorème, sur lequel Maxwell avait établi sa théorie des figures réciproques en Statique graphique, avant que Cremona y appliquât les propriétés des complexes linéaires.

Si deux droites sont polaires réciproques par rapport à un paraboloïde de révolution, leurs projections sur un plan perpendiculaire à l'axe du paraboloïde sont rectangulaires.

Soient alors ABC, A′B′C′ deux triangles orthologiques, D′ un de leurs centres d'orthologie, en sorte que D′A′, D′B′, D′C′ soient perpendiculaires respectivement à BC, CA, AB.

On peut considérer ABC comme projection d'un triangle *abc* de l'espace sur le plan de la figure, que je supposerai horizontal, et trouver un paraboloïde de révolution (P) d'axe vertical, tel que le pôle d' du plan abc par rapport à (P) se projette en D'. Cela peut se faire d'une infinité de manières. D'après le théorème rappelé ci-dessus, D'A', D'B' et D'C' sont les projections de $d'a'$, $d'b'$, $d'c'$, polaires respectivement de bc, ca, ab. Soient d le pôle du plan $a'b'c'$, et D sa projection; da, db, dc sont les polaires respectives de $b'c'$, $c'a'$, $a'b'$, en sorte que DA, DB, DC sont perpendiculaires respectivement à B'C', C'A', A'B'. Le point D est donc le second centre d'homologie des triangles ABC, A'B'C' (la démonstration en établit d'ailleurs l'existence).

Si maintenant les deux triangles ABC, A'B'C' sont homologiques, O étant leur centre d'homologie, les droites aa', bb', cc' rencontrent la verticale du point O. Mais les deux tétraèdres $abcd$, $a'b'c'd'$ étant polaires réciproques par rapport à (P), on sait que les droites aa', bb', cc', dd' sont sur une demi-quadrique. La verticale du point O, rencontrant les trois premières, rencontre donc aussi la quatrième. Autrement dit, DD' passe en O.

En outre, la droite d'intersection l des plans abc, $a'b'c'$ est la polaire de dd'. Sa projection L, qui n'est autre que l'axe d'homologie des triangles ABC, A'B'C', est donc perpendiculaire à DD'.

Le théorème est ainsi complètement établi.

L'application signalée dans l'énoncé est immédiate.

Remarque. — Le lemme utilisé est un cas particulier de la proposition suivante : *Si à partir d'un point quelconque de l'espace on projette sur un plan deux droites polaires réciproques par rapport à une quadrique, les projections obtenues sont conjuguées par rapport au contour apparent de la quadrique.*

La démonstration est facile.

Cette proposition permet de généraliser l'énoncé 2409, en remplaçant les relations d'orthogonalité qui interviennent dans la définition des triangles orthologiques par des *conjugaisons* de droites par rapport à une conique. Le raisonnement est identique.

On conclut aisément de là que l'énoncé 2409 *est valable sur la sphère.*

Autres solutions de l'AUTEUR et de M. THÉBAULT.

2427.

(1922-1923, p. 80.)

Soient ABCD *un quadrilatère inscriptible dans un cercle* Q, M *et* N *les extrémités du diamètre parallèle à la droite de Simson du point* D *par rapport au triangle* ABC. *Démontrer que les droites de Simson des points* M *et* N *par rapport au triangle* ABC *sont parallèles aux axes des paraboles circonscrites au quadrilatère* ABCD.

SERBAN A. GHEORGHÈRE.

SOLUTION

Par ÉMILE BALLY.

Les droites de Simson d'un triangle étant les tangentes aux sommets des paraboles inscrites à ce triangle, si l'on envisage, au lieu de ces droites, les ***axes*** de ces paraboles, l'énoncé se transforme dans le suivant :

Les axes des paraboles circonscrites à un quadrangle ABCD *inscriptibles dans un cercle* (Q) *sont parallèles aux axes des paraboles inscrites au triangle* ABC *et qui ont leurs foyers aux extrémités du diamètre de* (Q) *perpendiculaire à l'axe de la parabole de foyer* D *inscrite au triangle* ABC.

(Le lecteur est prié de faire la figure et de se rappeler la propriété élémentaire concernant les tangentes issues d'un point X à une parabole de foyer F, la droite XF et la parallèle issue de X à l'axe de la parabole.)

Joignons DA, et menons DT parallèle à BC, qui recoupe le cercle (Q) en T. L'axe de la parabole de foyer D inscrite à ABC est parallèle à AT.

La même construction, appliquée aux extrémités M et N du diamètre de (Q) perpendiculaire à AT, nous montre que *les axes des paraboles inscrites à* ABC *et qui ont leurs foyers en ces extrémités* M *et* N *sont précisément les droites* MD *et* ND, c'est-à-dire *les bissectrices des droites* DA *et* DT.

Les directions de ces bissectrices étant celles des bissectrices de la paire de côtés opposés DA et BC du quadrangle inscriptible ABCD, sont évidemment celles des axes des deux paraboles circonscrites à ce quadrangle.

Autres solutions par MM. C. CONVERS, Gaston ROY et R. BOUVAIST.