Nouvelles annales de mathématiques

Paul Lévy

Sur l'enseignement des notions relatives aux infiniment grands et aux infiniment petits dans la classe de mathématiques spéciales

Nouvelles annales de mathématiques 5e série, tome 3 (1924), p. 201-220

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1924_5_3__201_0>

SUR L'ENSEIGNEMENT DES NOTIONS RELATIVES AUX INFINIMENT GRANDS ET AUX INFINIMENT PETITS DANS LA CLASSE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

(*Suite*);

PAR PAUL LÉVY.

Pour terminer la question des expressions indéterminées, il reste à parler de celles qui se présentent sous la forme d'un produit ou d'un quotient de plusieurs facteurs infiniment grands ou infiniment petits. J'ai déjà dit plus haut qu'il suffit de remplacer chaque facteur par sa valeur principale. C'est la méthode générale, et il est inconcevable qu'on hésite à l'appliquer d'abord. Si les valeurs principales obtenues sont des expressions simples dont la croissance est connue, telles que x^α, e^x, $\log x$ (pour x infini par exemple), la question est résolue immédiatement. On sait lequel de ces facteurs l'emporte.

Il arrive que la solution ne soit pas aussi évidente, lorsque l'ordre de grandeur de certains facteurs se présente sous une forme moins familière. Mais il faut indiquer la véritable nature de la difficulté : mettre en évidence l'ordre de grandeur de chacun des facteurs. Soit par exemple à étudier, pour n infini, l'expression

$$u_n = n^{\log n} e^{-\sqrt{n}}, \tag{4}$$

où les deux facteurs ne sont pas d'un des types simples qui vient d'être indiqué, mais sont formés par des combinaisons simples des fonctions élémentaires connues. La principale difficulté provient du premier facteur, qui se présente sous la forme u^v; il est donc naturel de prendre les logarithmes, et d'écrire

$$\log u_n = (\log n)^2 - \sqrt{n},$$

ce qui résout immédiatement la difficulté.

On peut avoir des expressions de types très divers, qu'on ne peut tous prévoir au cours. L'étude des fonctions représentables par des intégrales définies dépasse évidemment le cadre du programme de la classe de mathématiques spéciales; toutefois les élèves pourraient savoir qu'on obtient une limite supérieure de l'intégrale

$$\int_a^b f(x)\,dx,$$

en remplaçant $f(x)$ par une valeur constamment plus grande, ou en particulier par une constante, égale au maximum de $f(x)$ dans cet intervalle.

A propos des formes indéterminées, je ne me contenterai pas d'indiquer les méthodes que je crois bonnes. Je veux combattre une méthode que l'on applique à tout propos à tort et à travers, celle qui repose sur l'emploi de la règle de l'Hospital. C'est en pensant à cette règle que j'ai écrit plus haut qu'on donnait aux élèves un bâton d'aveugle, après leur avoir mis un bandeau sur les yeux. Quelquefois elle réussit, quelquefois elle ne réussit pas; on cherche au hasard dans la nuit. Quelquefois il suffit de multiplier haut et bas par un même facteur pour faire qu'elle réussisse.

Prenons l'exemple d'un cas où elle réussit; soit à étudier le rapport

$$\frac{x - \sin x}{1 - \cos x}, \qquad \text{pour } x = 0.$$

En appliquant la règle deux fois, l'indétermination disparaît : Pourquoi? Parce que le dénominateur est un infiniment petit du second ordre et que le numérateur est d'un ordre plus élevé. Pourquoi alors ne pas dire : « Le numérateur, d'après le développement connu de $\sin x$, est équivalent à $\frac{x^3}{6}$, et le dénominateur à $\frac{x^2}{2}$; le rapport a donc pour valeur principale $\frac{x}{3}$ »? Ainsi l'on voit ce qu'on fait, et l'on n'a pas l'impression de toucher au but par hasard. Lorsqu'il s'agit de fonctions que l'on connaît, il s'agit d'utiliser les connaissances que l'on a de ces fonctions, et non d'appliquer à tort et à travers la règle de l'Hospital, cette règle qui doit, à mon avis, disparaître de la classe de mathématiques spéciales.

Pourtant il y a un bien joli chapitre d'analyse, se rattachant à cette règle. Quoiqu'il dépasse le programme de cette classe, j'en dirai quelques mots, pour une raison que l'on verra plus loin. Il s'agit des fonctions représentables par des intégrales définies. Soit par exemple l'intégrale

$$\int_x^\infty e^{-x^2}\,dx.$$

On ne sait pas la calculer; mais on sait calculer l'intégrale

$$\int_x^\infty e^{-x^2}\left(1+\frac{1}{2x^2}\right)dx = \frac{e^{-x^2}}{2x},$$

et la règle de l'Hospital montre que ces deux expressions sont équivalentes. Ici l'expression étudiée est définie par une quadrature, et l'idée de déduire ses propriétés de celles de ses dérivées s'impose; l'application de la règle de l'Hospital est dans la nature des choses.

Voici à peu près comment je présenterai la question :

Si $f(x)$ et $g(x)$ sont deux fonctions positives, dont le rapport, pour x infini, tende vers une limite k, on peut toujours trouver X tel que $x > X$ entraîne

$$(k-\varepsilon)g(x) < f(x) < (k+\varepsilon)g(x),$$

d'où, si a et b sont supérieurs à X,

$$(k-\varepsilon)\int_a^b g(x)\,dx < \int_a^b f(x)\,dx < (k+\varepsilon)\int_a^b g(x)\,dx.$$

Deux cas sont possibles; les deux intégrales sont simultanément ou convergentes, ou divergentes. Dans le premier cas, on peut faire b infini, ce qui donne

$$k\int_a^\infty g(x)\,dx \sim \int_a^\infty f(x)\,dx.$$

Dans le second cas, les trois membres de la double inégalité considérée deviennent infinis avec b; des constantes ajoutées à ces membres ont une influence négligeable, ce qui permet de remplacer a par une quantité x_0 indépendante de ε. L'inégalité subsiste, à condition de prendre b assez grand et de remplacer ε par 2ε. Il vient ainsi

$$k\int_{x_0}^x g(x)\,dx \sim \int_{x_0}^x f(x)\,dx, \qquad [x \to \infty].$$

Les règles de l'Hospital, relatives aux formes $\frac{0}{0}$ et $\frac{\infty}{\infty}$, sont ainsi établies, avec une différence dans le langage; au lieu de parler d'une fonction $F(x)$ et de sa dérivée $f(x)$, on parle d'une fonction $f(x)$ et sa primitive $F(x)$. La même différence existe entre le théorème des accroissements finis et le théorème de la moyenne, qui ne sont que deux énoncés d'un même théorème.

On sait la relation entre les séries et les intégrales, mise en évidence par un théorème connu de Cauchy. Le théorème précédent a son analogue dans la théorie des séries. Soient u_n et v_n les termes généraux, supposés positifs, de deux séries, S_n et Σ_n les sommes de rang n, R_n et ρ_n les restes, si les séries sont convergentes. Le théorème est le suivant : si $u_n \sim v_n$, on a $S_n \sim \Sigma_n$, si les séries sont divergentes ; $R_n \sim \rho_n$, si elles sont convergentes.

Il est même facile, en restant dans cet ordre d'idées, d'avoir un véritable développement en série de S_n en cherchant la valeur principale de $S_n - \Sigma_n$ (ou de $R_n - \rho_n$).

On peut compléter ces notions en précisant la relation entre les séries et les intégrales mise en évidence par le théorème de Cauchy. L'inégalité sur laquelle repose ce théorème,

$$\int_1^n f(x)\,dx > u_2 + u_3 + \ldots + u_n > \int_2^{n+1} f(x)\,dx,$$

$f(x)$ étant une fonction décroissante. donnant une limite supérieure et une limite inférieure de S_n, en donne la valeur principale, si ces deux limites sont équivalentes. Dans cet ordre d'idées, on peut aussi avoir des développements en série de S_n et ρ_n. Je n'insiste pas sur ces questions, qui me conduiraient à parler de la série trop peu connue d'Euler-Maclaurin, et renvoie ceux qu'elles intéressent à mon cours de l'École Polytechnique, où elles sont sommairement indiquées.

De même qu'on peut étudier les propriétés d'une fonction en la considérant comme l'intégrale de sa dérivée, un moyen d'étudier une quantité S_n, pour n

infini, est de la considérer comme somme d'une série de terme général $u_n = S_n - S_{n-1}$, et ce moyen est dans la nature des choses si u_n est plus simple que S_n. En remontant du logarithme au nombre, on voit que l'ordre de grandeur d'une expression $f(n)$ peut se déduire de l'étude du rapport $\frac{f(n)}{f(n-1)}$ $\left[\text{ou } \frac{f(n+1)}{f(n)}\right]$. De là l'intérêt de la règle de d'Alembert pour les séries. Mais il ne faut pas la considérer comme une règle relative spécialement aux séries; c'est une règle permettant de mettre en évidence l'ordre de grandeur du terme général $f(n)$, lorsqu'il est donné sous une forme tel que le rapport $\frac{f(n+1)}{f(n)}$ soit simple.

Si ce rapport tend vers une limite positive k, l'expression

$$u_n = \log f(n+1) - \log f(n)$$

tend vers $\log k$. Il résulte du théorème qui vient d'être rappelé que $\log f(n) \sim n \log k$, c'est-à-dire que

$$\frac{1}{n} \log f(n) \to \log k.$$

Remontant du logarithme au nombre, nous voyons que $\sqrt[n]{f(n)}$ tend vers la même limite que $\frac{f(n+1)}{f(n)}$. C'est le résultat connu concernant la comparaison des règles de Cauchy et de d'Alembert.

L'application de cette méthode à la fonction $n!$ est particulièrement indiquée. C'est une fonction telle que $\frac{n!}{(n-1)!} = n$. La fonction a^n est telle que $\frac{a^n}{a^{n-1}} = a$. Il suffit alors pour comparer ces deux fonctions d'étudier le rapport $f(n) = \frac{n!}{a^n}$; comme $\frac{f(n)}{f(n-1)}$ croît dès que $n > a$, $n!$ croît plus vite que a^n, et par suite infiniment plus vite a^n (puisqu'elle croît plus vite que b^n, b étant un nombre supérieur à a).

Toujours dans le même ordre d'idées, on peut préciser l'ordre de grandeur de $n!$. L'application de la même méthode à $\frac{n!\,e^n}{n^n}$ montre que cette fonction croît ou décroît moins vite qu'une exponentielle ; sa racine $n^{\text{ième}}$ tend vers l'unité. Donc $\sqrt[n]{n!}$ a pour valeur principale $\frac{n}{e}$.

Précisons encore, en étudiant la fonction

$$f(n) = \frac{n!\,e^n}{n^n\sqrt{n}}.$$

Son logarithme est la somme d'une série dont le terme général est

$$\begin{aligned}&\log f(n) - \log f(n-1)\\ &= 1 + \left(n - \frac{1}{2}\right)\log\left(1 - \frac{1}{n}\right) \sim -\frac{1}{12n^2}.\end{aligned}$$

Cette série est donc convergente ; $f(n)$ tend vers une limite, et la valeur principale de $n!$ se trouve ainsi déterminée, à un facteur constant près. Il est facile de préciser encore, et de donner un développement en série de $\log n!$.

Tout ce qui précède dépasse évidemment beaucoup le niveau de la classe de mathématiques spéciales ; mais il est essentiel que le professeur soit inspiré de ces principes pour présenter sous son véritable aspect la règle de d'Alembert relative aux séries.

Avant d'aborder les séries, j'indiquerai comment, à mon avis, l'on doit démontrer que le rapport $\frac{e^x}{x^m}$ augmente indéfiniment avec m. On peut évidemment y arriver par une application m fois répétée de la règle de l'Hospital ; d'ailleurs il suffit de faire $m = 1$, et le théorème plus général résulte immédiatement de ce cas particulier en élevant l'expression étudiée à la puissance $m^{\text{ième}}$ et remplaçant ensuite mx par x. Cela serait dans la nature des choses si e^x était défini comme solution de l'équation $y' = y$, ou ce qui revient au même si $\log x$ était défini par la formule

$$\log x = \int_1^x \frac{dx}{x}.$$

Ce serait une intéressante introduction à la théorie des fonctions définies par des quadratures, et en particulier à la théorie des fonctions elliptiques. Ce serait, à mon avis, une erreur d'employer cette méthode dans un enseignement plus élémentaire.

Il est indispensable en effet de définir d'abord la fonction exponentielle a^x par ses propriétés élémentaires. Elle est définie d'abord si l'exposant est entier; il s'agit de la définir ensuite, par des interpolations convenables, si x est fractionnaire. Le principe de ces interpolations est que si les valeurs de x varient en progression arithmétique, celles de a^x varient en progressions géométriques. C'est la vieille théorie, autrefois en faveur pour définir les logarithmes, et qu'il serait désirable de ressusciter, mais pour définir la fonction exponentielle; ainsi exposée elle ne fait que préciser une notion intuitive, l'élève étant familiarisé depuis longtemps avec la notion de l'exposant. Rien n'est plus facile ensuite que de définir le logarithme comme fonction inverse de l'exponentielle.

Il serait intéressant ensuite d'étudier la variation de a^x en partant de ces propriétés élémentaires. La courbe tourne sa concavité vers le haut, et de ce seul fait on déduit immédiatement l'existence d'une dérivée à droite et d'une dérivée à gauche [1], dont on dé-

[1] Soit par exemple un point M de la courbe, dont l'abscisse

montre aisément ensuite qu'elles ont pour valeur commune ke^x, k étant le logarithme de a dans un système ayant pour base un certain nombre e; on constate encore aisément que e peut être défini comme limite de $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ pour m infini. L'étude de la série entière représentant e^x conduirait ultérieurement à la série e, et le développement de $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ par la formule du binome, moins difficile d'ailleurs qu'on ne l'a cru longtemps, apparaîtrait seulement comme une vérification d'un résultat obtenu autrement par une méthode plus naturelle.

Je ne veux pas insister sur cette manière d'obtenir la dérivée de a^x. Ce que j'ai voulu surtout indiquer, c'est que la propriété fondamentale de a^x, celle qu'il faut prendre comme point de départ de la théorie, est que a^x est une fonction qui devient a fois plus grande chaque fois que x augmente d'une unité. Comment alors démontrer que, si $a > 1$, le rapport $f(x) = \frac{a^x}{x^m}$ augmente indéfiniment avec m? Une méthode s'impose, celle qui repose sur la considération du rapport

$$\frac{f(x)}{f(x-1)} = a\left(1-\frac{1}{x}\right)^m$$

qui tend vers a. Donc, dès que x dépasse une certaine valeur X, $f(x)$ augmente quand x augmente d'une unité. Il reste donc toujours, dès que $x > X+1$, supérieur au maximum M de $f(x)$ entre X et $X+1$. En remplaçant m par $m+1$, on voit de même que $\frac{a^x}{x^{m+1}}$

---

varie en croissant, et qui tende vers un point fixe A; soit B un point d'abscisse supérieure à celle de A. D'après le sens de la convexité de la courbe, le coefficient angulaire de MA croît en restant inférieur à celui de AB; il a donc une limite. Tout le reste s'en déduit sans difficulté.

reste supérieur à un nombre fixe, ce qui prouve que $\frac{a^x}{x^m}$ augmente indefiniment.

Passons maintenant à la théorie des séries, une des principales applications des notions qui précèdent. Je ne parlerai que des séries à termes positifs ([1]).

La première idée à mettre en évidence est que la somme d'une infinité de quantites tendant vers zéro peut être finie ou infinie. Le meilleur moyen est de prendre une fonction connue, dont la derivée s'annule à l'infini. Prenons par exemple la fonction $\log x$; $\log n$ peut être considéré comme de la série de terme général

$$\log n - \log(n-1) = \log\left(1 - \frac{1}{n}\right).$$

Le terme général tend bien vers zéro, et si cela ne résultait pas des propriétes elémentaires des loga-

---

([1]) Le professeur est bien entendu, libre d'exposer les diverses parties du programme dans l'ordre qu'il juge preferable L'usage est d'exposer la theorie des series presque au debut du cours, ce qui exige certaines modifications à l'exposé des principes dont il est question dans le texte, mais ce qui ne saurait dispenser d'insister sur ces principes a un moment ou a un autre Il est d'ailleurs possible de ne parler des series qu'apres avoir termine l'expose des principales notions relatives aux derivees et aux integrales. Cela implique 1° qu'on expose la theorie de la fonction exponentielle sans introduire la serie e, en suivant la marche indiquee plus haut; 2° qu'on parle de developpements en serie sans s'inquieter de la convergence, ce qui ne peut presenter aucune difficulte si l'on indique que la signification d'un tel developpement, limité à un terme quelconque, est que le reste est a la limite négligeable devant le dernier terme écrit; 3° que l'on distingue la formule de Taylor et la serie de Taylor.

Le chapitre sur les series numeriques serait alors immediatement suivi du chapitre sur les séries entieres

Il me semble que cet ordre est plus dans la nature des choses que celui que l'on emploie généralement et presente d'autant moins d'inconvénient que les eleves savent ce que c'est qu'une série, avant d'entrer en Mathématiques Speciales.

rithmes, on pourrait le déduire de la formule des accroissements finis; cette méthode montre bien que la même remarque s'applique toutes les fois que la dérivée de la fonction considérée tend vers zéro. On a ainsi des exemples de séries divergentes. En raisonnant de même sur la fonction $\frac{1}{x^\alpha}$, $(\alpha > 0)$, on a des exemples de séries convergentes. Ainsi, pour $\alpha = 1$, on voit que la série de terme général

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}$$

est convergente.

Cette idée fondamentale, et la remarque évidente qu'il est nécessaire pour la convergence que le terme général tende vers zéro, doivent ensuite être complétées par les deux notions suivantes : étude de la convergence basée sur la comparaison de la série étudiée avec une série connue; méthode basée sur la comparaison avec les intégrales.

La méthode de comparaison des séries, qui est essentielle, semble généralement assez bien comprise. Je signale qu'en général les élèves ne se rendent pas compte que cette méthode ne s'applique pas aux termes de signes quelconques (dans ce cas on peut souvent avec avantage considérer la série comme somme de deux autres, ou au contraire grouper les termes de manière à avoir une série à termes positifs). Il y aurait intérêt à introduire les expressions suivantes, qui rendent la méthode de comparaison plus intuitive : la série de terme général u_n sera dite *plus convergente* qu'une série convergente de terme général v_n si le rapport $\frac{u_n}{v_n}$ tend vers zéro; elle sera dite *au moins aussi convergente* si ce rapport est limité supérieurement.

On emploierait de même l'expression de série *plus divergente*, *moins divergente*, *au moins aussi divergente* qu'une autre.

Il s'agit alors de trouver quelques séries simples connues qui puissent servir de termes de comparaison. Ces séries simples, celles dont le terme général est

$$u_n = \frac{1}{n^n}, \tag{5}$$

ont précisément été données comme exemples au début. Le théorème de Cauchy sur la comparaison des séries et des intégrales, utile à exposer à ce moment, précisera ce qui aura déjà été dit au sujet de ces séries; comme je l'ai indiqué plus haut, il permet souvent, non seulement de résoudre la question de convergence ou divergence, mais d'évaluer d'une manière très approchée la somme S_n ou le reste R_n.

La condition de convergence de la série de terme général $\frac{1}{n^\alpha}$ s'obtient si aisément par cette méthode qu'il est surprenant qu'on en ait cherché d'autres. La plus répandue repose sur cet autre théorème de Cauchy d'après lequel, si u_n décroît constamment, la série de terme général u_n est de même nature que celle dont le terme général est $a^p u_{a^p}$ (a entier positif). Ou bien l'on démontre ce théorème d'une manière générale, ou bien on le démontre dans le cas particulier considéré. Mais la véritable nature de ce théorème apparaît mieux si l'on énonce le théorème correspondant relatif aux intégrales. Les intégrales

$$\int f(x)\,dx \quad \text{et} \quad \int f(a^t)\,a^t\,dt$$

sont de même nature. On passe en effet de l'une à l'autre, à un facteur constant près, par le changement de variable $x = a^t$. Comme tout devient clair dès qu'on introduit la notion d'intégrale!

D'ailleurs le théorème de Cauchy rattachant les séries aux intégrales doit surtout servir à trouver des séries qui puissent servir de termes de comparaison; la série de terme général $\frac{1}{n^\alpha}$ est particulièrement indiquée dans ce but.

La méthode générale pour étudier la convergence d'une série à termes positifs est donc la suivante : mettre en évidence l'ordre de grandeur du terme général; si l'on n'arrive pas à obtenir sa valeur principale, chercher du moins une limite inférieure et une limite supérieure (l'une des deux suffit d'ailleurs, mais on ne sait pas, *a priori*, laquelle). Une fois cette valeur principale obtenue, le caractère de convergence ou de divergence de la série étudiée apparaîtra d'une manière évidente, si l'on a une idée de la manière dont se classent les principales fonctions usuelles au point de vue de leur croissance, et du point où la condition que la série de terme général $\frac{1}{f(n)}$ soit convergente constitue une coupure dans le classement des fonctions $f(n)$ devenant infinies. Si le résultat n'apparaît pas d'une manière évidente, c'est que l'on aura affaire à un type de croissance non encore connu, qu'il s'agit de comparer à ceux déjà connus, et il y a intérêt à poser la question d'une manière précise sous la forme suivante : chercher ce que devient, pour n infini, le produit $n^\alpha u_n$.

Si par exemple u_n a la valeur (4), son ordre de grandeur n'apparaît pas immédiatement, cette valeur, obtenue par des combinaisons simples des fonctions usuelles, n'ayant pas, dans l'échelle des fonctions rangées d'après la rapidité de leur croissance, une place que l'on sache par cœur. On forme donc le produit

$$n^\alpha u_n = n^\alpha n^{\log n} e^{-\sqrt{n}}.$$

L'aspect de ce produit, dont les différents facteurs sont du type u^v, conduit à en prendre le logarithme. Par cette méthode, on voit qu'il tend vers zéro, quel que soit α. La série est donc convergente.

Au lieu de la méthode qui précède, qu'apprend-on aux élèves? Trois règles de convergence, que l'on met sur le même pied. Bâton d'aveugle qu'on leur donne dans la nuit!

L'erreur est double. D'abord on n'insiste pas sur le fait qu'il s'agit, avant tout, de mettre en évidence l'ordre de grandeur du terme général, et à cet effet de chercher les simplifications que l'on peut effectuer sans altérer cet ordre de grandeur. Aussi, les élèves se trouvent-ils en présence d'une expression un peu compliquée, mais facile à simplifier, n'y songent-ils pas et commencent-ils par former $\sqrt[n]{u_n}$, ce qui, généralement, ne leur sert pas à grand' chose.

La seconde erreur consiste à ne pas insister assez sur la différence profonde qui existe entre la troisième règle et les deux premières. J'imagine un professeur de géographie voulant apprendre à un élève le moyen de reconnaître si une ville située sur une ligne de chemin de fer de Paris à Madrid et située à une distance connue de Paris est en France, et qui lui dirait : « Première règle : comparer la distance donnée à 588^{km}, distance de Paris à Bordeaux; deuxième règle, à appliquer si la première ne permet pas de conclure : comparer la distance donnée à 822^{km}, distance de Paris à la frontière. » Que penserait-on d'une pareille méthode? la deuxième règle ne dispense-t-elle pas de la première?

La coupure constituée par la notion de convergence dans l'échelle de croissance des diverses fonctions ne peut pas être située d'une manière aussi précise que le pont sur la Bidassoa. Aussi faut-il prendre comme terme de comparaison une série qui n'en soit pas trop éloignée. Il n'y a pas intérêt, au point de vue de ce que les élèves de Mathématiques Spéciales doivent savoir, à exagérer les efforts pour se rapprocher de la coupure, en introduisant par exemple la série de terme général $\frac{1}{n(\log n)^\alpha}$, et il suffit pour eux de savoir que la coupure est entre la série de terme général $\frac{1}{n}$ et celle de terme général $\frac{1}{n^\alpha}$, α étant un nombre supérieur à l'unité d'aussi peu que l'on veut. C'est pourquoi, si la situation de la série étudiée par rapport à la coupure n'apparaît pas clairement dès que l'on a simplifié autant que possible le terme général, doit-on considérer que la méthode indiquée est de chercher ce que devient $n^\alpha u_n$ pour n infini.

La valeur de l'exposant a prendre embarrasse les élèves. Ils sont hantés par l'idée de distinguer suivant que α est ou non supérieur à l'unité. C'est vouloir aller trop vite. Qu'ils commencent par chercher ce que devient $n^\alpha u_n$ pour n infini, sans rien préjuger du résultat! Il peut arriver que le résultat dépende de α; ils le verront bien. De toute façon, ce résultat obtenu, ils ne doivent pas être embarrassés pour conclure sur la question de convergence, à moins d'être précisément dans le cas où la règle utilisée ne permet pas de conclure.

Je répète d'ailleurs qu'ils ne doivent même pas se donner la peine de former le produit $n^\alpha u_n$, si u_n est donné sous une forme telle que l'ordre de grandeur de u_n comparé à celui des fonctions $\frac{1}{n^\alpha}$ apparaisse immédiatement. Ainsi, si

$$u_n = \frac{1}{n^{\varphi(n)}}, \tag{6}$$

la fonction $\varphi(n)$ devenant infinie avec n, on n'est pas excusable d'hésiter à conclure immédiatement. J'ai même vu un élève (je ne parle toujours que de ceux dont l'examen était bon par ailleurs), qui, ayant trouvé avec mon aide que la valeur principale de u_n était $\frac{A}{n^\alpha}$, a introduit un autre exposant p (car il ne faut pas donner le même nom à deux choses différentes!), a étudié le produit $n^p u_n$, m'a expliqué qu'il y aurait plusieurs cas à distinguer suivant les valeurs de p, et finalement s'est si bien embrouillé qu'il a fallu que je l'aide à nouveau. Sans doute se serait-il aperçu que le problème était résolu si on lui avait appris à le voir sous son aspect véritable, en lui disant qu'il fallait mettre en évidence l'ordre de grandeur de u_n.

Quant aux deux premières règles de convergence, les employer, c'est comme comparer notre station de chemin de fer de tout à l'heure à Orléans ou à Madrid. Il convient de réduire au minimum les explications relatives à la règle de Cauchy, en disant simplement que si une série converge plus rapidement qu'une progression géométrique (ce qui est une convergence très rapide), on peut parfois le reconnaître simplement par l'étude de l'expression $\sqrt[n]{u_n}$. L'importance de cette règle si grossière augmentera d'ailleurs par la suite, car elle suffit toujours pour trouver le rayon de convergence d'une série entière (mais ne permet pas de décider de la convergence sur la circonférence du cercle de convergence).

Quant à la règle de d'Alembert, j'ai déjà indiqué son caractère spécial. Il peut arriver que u_n soit donné sous une forme telle que le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ soit plus simple que u_n [aux exemples déjà indiqués j'ajoute celui de la série $(1+x)^m$]. Alors l'étude de ce rapport permet de mettre en évidence l'ordre de grandeur de u_n; mais ce procédé n'a rien à voir avec le fait que u_n soit le terme général d'une série, et il faut indiquer sa plus grande portée, même si c'est à propos des séries qu'on expose cette méthode ([1]).

Pour terminer ces remarques, j'ajouterai quelques mots sur la recherche des asymptotes des courbes dont l'équation est résolue par rapport à y.

Voici tout ce que je dirais sur ce sujet, si j'étais chargé de le traiter.

Pour étudier l'allure de la courbe pour x infini, on développe y en série. (Tout ce qui a été dit pour les développements en série s'appliquant aussi bien lorsque la variable est infiniment grande que lorsqu'elle est infiniment petite; bien entendu il s'agit toujours de mettre en évidence d'abord les termes principaux, et l'on peut être conduit à un développement suivant les puissances décroissantes de x, mais non suivant les puissances croissantes. Les calculs étant les mêmes, cela ne sert à rien de poser $x = \frac{1}{t}$ pour ramener un cas à l'autre.) Si le développement se présente sous la

([1]) Pratiquement, le professeur ne peut sans doute pas se dispenser d'exposer les trois règles. Mais il doit ensuite mettre chaque chose à sa place en donnant aux élèves, lorsqu'ils ont à étudier la convergence d'une série, quelques indications sur la marche à suivre. C'est alors qu'il devra tenir compte des remarques indiquées dans le texte.

forme

$$y = ax + b + \varepsilon, \tag{7}$$

a et b étant des constantes, et ε infiniment petit, la courbe est asymptote à la droite $y = ax + b$ et le signe de ε donne la position de la courbe par rapport à cette asymptote. Dans tout autre cas il n'y a pas d'asymptote. On peut ajouter quelques mots pour indiquer dans quels cas il y a une branche parabolique, puis traiter quelques exemples.

Au lieu de cela, que dit-on?

« 1° Je cherche la limite du rapport $\frac{y}{x}$;

» 2° Soit a cette limite, je cherche la limite de $y - ax$;

« 3° Soit b cette limite, je cherche le signe de $y - ax - b$. »

Sans doute, dira-t-on, cela revient au même. De toute façon il s'agit de trouver les trois premiers termes d'un développement en série.

L'expérience démontre que cela ne revient pas au même. On doit avoir parlé aux élèves de développements en séries; on doit leur avoir donné à ce sujet des méthodes de calcul très simples. Il faut leur dire qu'il s'agit d'appliquer ces méthodes, et ils ne comprennent pas que c'est la même chose si l'on n'emploie pas le même langage que la première fois.

Combien le résultat est vite obtenu lorsqu'on leur dit de développer y en série. Si au contraire on les laisse appliquer leur méthode, voici à peu près ce qu'on entend au sujet de la différence $y - ax$: « Je m'étonne de trouver la forme indéterminée $\infty - \infty$ (un instant de réflexion); j'ai l'idée ingénieuse de mettre x en facteur et d'écrire $x\left(\frac{y}{x} - a\right)$ (nouvelle réflexion, examen attentif des deux facteurs); je m'étonne de trouver la forme indéterminée $\infty \times 0$; je vais m'efforcer de lever cette indétermination.... » Tout cela pour arriver à un résultat souvent évident *a priori* car il arrive que la courbe soit précisément donnée sous la forme (7), ou se ramène à cette forme par une transformation simple, dont l'élève aurait l'idée s'il savait quelle est la question qui se pose à lui.

Maintenant que j'ai terminé mes critiques, le lecteur peut penser que j'ai pris la plume pour bien peu de chose; il y a si peu de différence entre les méthodes que je critique et celles que je veux leur substituer! Sans doute; les mathématiques ne se transforment pas comme le fait la physique lorsque apparaît une théorie nouvelle. Mais ce que je demande constituerait pour certains professeurs un changement assez profond dans l'esprit de l'enseignement, autant que je puis en juger par les réponses que je reçois aux examens.

Il me semble qu'il subsiste encore actuellement quelque chose de l'état d'esprit des contemporains de Leibniz et de Newton que déconcertaient les méthodes nouvelles du calcul infinitésimal. Maintenant encore, on cherche trop à tout ramener à des opérations sur les nombres. Les quantités qui dépendent d'une variable peuvent sans doute s'ajouter et se multiplier comme de simples nombres. Mais il se pose à leur sujet des problèmes qui ne se posent pas pour les nombres, celui de la dérivation par exemple, ou celui, dont nous venons de nous occuper, de rechercher comment certaines quantités deviennent infiniment petites ou infiniment grandes. Ces problèmes ne sont pas difficiles; mais il faut s'efforcer d'en comprendre la véritable nature, de créer un langage approprié à ces problèmes, ne pas craindre d'user et d'abuser de ce langage si commode dont on n'emploie actuellement que quelques mots avec la plus grande timidité ([1]). La difficulté qu'éprouvent beaucoup d'élèves à raisonner sur ces questions semble due en partie à ce qu'ils sont habitués à les traiter avec le langage de l'algèbre élémentaire, qui suffit pour les opérations sur les nombres, mais qui ne suffit pas dans toutes les branches de l'analyse.