Nouvelles annales de mathématiques

Maurice Fréchet

La semi-continuité en géométrie élémentaire

Nouvelles annales de mathématiques 5e série, tome 3 (1924), p. 1-9

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1924_5_3__1_0>

NOUVELLES ANNALES
DE
MATHÉMATIQUES.

[$O^1 5b$]

LA SEMI-CONTINUITÉ EN GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE;

PAR MAURICE FRÉCHET,

1. REMARQUES SUR LA DÉFINITION DE L'AIRE D'UNE SURFACE COURBE. — La définition de l'aire d'une surface courbe S a donné lieu à de nombreux et importants travaux, depuis que l'objection bien connue présentée par Peano et Schwarz a entraîné l'abandon de la définition de l'aire de S comme limite de l'aire des surfaces polyédrales inscrites dans S et convergeant vers S, sans autre condition.

Sans entrer dans le détail de ces travaux, il nous suffira de constater qu'ils ont pour but d'attribuer à toute surface courbe S ou au moins à celles qui appartiennent à une catégorie aussi générale que possible un nombre qui sera appelé l'aire de la surface, et qui jouira des propriétés que la notion intuitive d'aire permet d'en attendre. Dans le champ Q des surfaces S (qu'on pourra appeler quarrables) auquel l'une de ces définitions permet d'attribuer une aire A, on aura défini une « fonction de surface » A(S). C'est un exemple élémentaire de ces fonctions dénommées « fonctionnelles » par M. Hadamard pour rappeler que leur argument S n'est pas nécessairement une variable numérique, mais un élément de nature quelconque.

Une condition qui s'impose naturellement à toute définition de l'aire d'une surface courbe, c'est que cette définition coïncide, dans le cas où S est une surface polyédrale, — c'est-à-dire une surface constituée par un nombre fini de polygones plans contigus — avec la définition classique fournie par la géométrie élémentaire. En particulier le champ Q constitué par l'ensemble des surfaces quarrables devra nécessairement contenir le champ π des surfaces polyédrales. On peut alors formuler le problème consistant à définir l'aire d'une surface courbe de la façon suivante.

Une certaine fonction de surface A(P) est définie par les méthodes de la géométrie élémentaire sur le champ π constitué par l'ensemble des surfaces polyédrales P. Il s'agit de définir un champ Q plus étendu que π — aussi étendu que possible — et sur lequel on prolongera la fonction A(P) en construisant une fonction B(S) définie pour toute surface S du champ Q et égale à A(S) sur le champ initial π.

Des problèmes de ce genre se présentent fréquemment en géométrie élémentaire. Par exemple lorsque ayant défini la mesure des angles commensurables avec l'unité d'angle on passe à la mesure des angles incommensurables avec l'unité d'angle. Mais cet exemple nous montre que pour determiner la solution on impose d'avance une condition au prolongement : celle de fournir une fonction continue sur le champ prolongé.

Il est bien évident que cette condition ne peut être imposée sur le champ prolongé que si elle est déjà verifiée sur le champ initial.

Par conséquent si l'on veut appliquer cette méthode ou une méthode basée sur la même idée ([1]), il faudra d'abord étudier quelles sont les propriétés de la fonction donnée au point de vue de la continuité sur le champ initial. C'est ce que nous voudrions faire ici dans le cas où ce champ est celui des surfaces polyédrales et où la fonction est l'aire telle qu'elle est définie en géométrie élémentaire. Le résultat obtenu peut être considéré comme contenu implicitement dans les travaux sur l'aire d'une surface courbe et le mode de démonstration est une application à ce cas simple de la méthode développée par M. Baire dans ses *Leçons sur les théories générales de l'Analyse*, p. 210. Mais je ne crois pas que le résultat ni sa démonstration aient été publiés indépendamment de la théorie des surfaces courbes. Il m'a paru qu'ils pourraient intéresser les lecteurs de ces *Annales* comme un exemple de l'utilité que peuvent présenter pour la géométrie élémentaire certaines notions modernes comme la semi-continuité introduites à l'occasion de fonctions compliquées et peu courantes. C'est aussi une nouvelle preuve du fait généralement peu connu que les notions qui peuvent paraître les plus subtiles et les plus artificielles dans la théorie des ensembles linéaires et la théorie des fonctions d'une variable se trouvent au contraire indispensables et d'une utilisation courante pour les fonctionnelles les plus simples et les plus anciennement connues. C'est ainsi que dans son Traité sur le Calcul des Variations, M. Tonnelli a constamment recours à la semi-continuité des fonctionnelles qu'il étudie.

II. Propriétés de l'aire d'une surface polyédrale

([1]) Cette méthode est appliquée dans un Mémoire qui sera publié prochainement dans *Fundamenta Mathematicæ*.

CONSIDÉRÉE COMME FONCTION DE SURFACE. — Envisageons donc l'aire $A(P)$ d'une surface polyédrale comme une fonction de surface dans le seul champ π des surfaces polyédrales. Comme je l'ai indiqué plus haut, pour appliquer la méthode de prolongement ordinaire il faudrait s'assurer que, dans ce champ, $A(P)$ est une fonction continue de P, c'est-à-dire que si les surfaces polyédrales $P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots$ tendent vers une surface polyédrale P, l'aire $A(P_n)$ tend vers l'aire $A(P)$.

Or il n'en est rien, comme on s'en assure facilement. Considérons d'abord le cas où P est réduit à un triangle $T \equiv ABC$ et découpons celui-ci en n^2 petits triangles homothétiques à ABC. Puis considérons ces triangles comme bases d'autant de pyramides semblables à une pyramide $O_n ABC$ ayant pour base ABC et appelons T_n l'ensemble des surfaces latérales de ces petites pyramides. Si, par exemple, O_n se déplace sur une perpendiculaire au plan du triangle passant par l'intérieur du triangle et si la distance h_n de O_n au plan ABC est infiniment petite par rapport à n, la hauteur $\frac{h_n}{n}$ des petites pyramides qui constituent T_n tendra vers zéro avec $\frac{1}{n}$, donc la surface T_n convergera vers T. D'autre part l'aire $A(T_n)$ sera égale à l'aire latérale de la pyramide $O_n ABC$. Or en prenant $h_n = \frac{H}{n}$, H, ou $\sqrt{n}$, on voit que l'on pourra faire tendre cette aire latérale vers n'importe quel nombre égal ou supérieur à l'aire $A(T)$ du triangle ABC ou même vers l'infini.

Si maintenant on considère une surface polyédrale P et si on la décompose en triangles auxquels on applique la méthode précédente, on voit qu'*étant donnée une surface polyédrale* P, *on peut construire une suite de surfaces polyédrales* P_n *qui converge vers* P *de* *telle manière que l'aire* $A(P_n)$ *converge, comme on le voudra, soit vers* $A(P)$, *soit vers un nombre arbitrairement choisi supérieur à* $A(P)$, *soit même vers l'infini.*

Il est même possible, comme cela sera montré ailleurs [1], de modifier la construction de Schwarz de façon à pouvoir imposer aux surfaces P_n la condition d'être formées de triangles inscrits [2] dans la surface polyédrale P [3].

Ainsi *l'aire d'une surface polyédrale est, dans le champ, pourtant bien simple, constituée par toutes les surfaces polyédrales, une fonctionnelle discontinue.* Les méthodes intuitives de prolongement usitées en géométrie élémentaire ne peuvent donc s'appliquer même au cas simple où la fonction à prolonger est l'aire d'une surface polyédrale.

Cependant on pressent que cette fonction ne peut être d'une discontinuité irrémédiable et totale.

C'est grâce à la notion de « semi-continuité » introduite par M. Baire dans la théorie des fonctions de variables réelles que nous pourrons caractériser le genre de continuité partielle de l'aire dans le champ π des surfaces polyédrales.

Une fonction $A(P)$ *définie dans un champ* π *d'éléments* P *est dite semi-continue inférieurement en* P_0 *sur le champ* π, *si,* P_0 *étant un élément du champ* π, $A(P_0)$ *est égal au « minimum » de* $A(P)$ *en* P_0 *sur* π. Le mot « minimum » est ici pris dans un sens généralisé. Le minimum de $A(P)$ en P_0 sur π est ici la plus petite des limites vers lesquelles peut tendre $A(P_n)$

(1) Fréchet, *Annales de la Société Mathématique polonaise*, t. II, 1924.

(2) C'est-à-dire dont les sommets sont sur P.

(3) Dans l'exemple de Schwarz la surface limite est un cylindre.

lorsque P_n est un élément qui reste sur le champ π en tendant vers P_0 tout en restant distinct de P_0. Désignons ce minimum par $A_\pi(P_0)$. Si $A(P)$ est semi-continue inférieurement en P_0, on doit avoir $A(P_0) = A_\pi(P_0)$.

Nous allons montrer que l'aire est une telle fonction sur tout le champ π des surfaces polyédrales, c'est-à-dire quel que soit P_0 sur π.

D'après ce que nous avons vu plus haut, quelle que soit la surface polyédrale P_0, et quel que soit le nombre $B \geqq A(P_0)$, on peut construire une suite de surfaces de polyédrales $P'_1, P'_2, \ldots$ distinctes de P_0 et convergeant vers P_0 de sorte que $A(P'_n)$ converge vers B. Par suite

$$A_\pi(P_0) \leqq A(P_0). \tag{1}$$

Il reste à montrer que $A_\pi(P_0)$ n'est pas inférieur à $A(P_0)$.

Utilisons ici le raisonnement de M. Baire simplifié en l'adaptant au cas des surfaces polyédrales.

Soit $P_1 P_2 \ldots P_n \ldots$ une suite de surfaces polyédrales qui converge vers une surface polyédrale P_0. Que ces surfaces soient polyédrales ou non, on entend par là qu'on peut établir entre P_0 et P_n une correspondance ponctuelle H_n [1] telle que le maximum δ_n de la distance de deux points M, M_n correspondants tend vers zéro avec $\frac{1}{n}$. Une face F de P_0 est une région polygonale qui correspond, par H_n, à une certaine portion F_n de P_n. Soit m_n la projection du point M_n de F_n sur le plan de F. On a $M m_n \leqq MM_n \leqq \delta_n$. Lorsque M parcourt le contour de F, m_n reste à l'intérieur de la suite de rectangles de largeur $2\delta_n$ ayant chacun pour axe de

[1] On suppose bien entendu cette correspondance biunivoque et bicontinue.

symétrie un des côtés du contour F prolongé dans les deux sens d'une longueur δ_n. Soit σ_n l'aire de la région g_n commune à F et à la suite de ces rectangles. Lorsque M parcourt l'intérieur de F, le point m_n parcourt une région qui comprend au moins la région f_n obtenue en enlevant g_n de F. Cette région est limitée par un ou plusieurs polygones et son aire est $A(F) - \sigma_n$. Donc F_n comprend au moins une région F'_n de P_n limitée par un ou plusieurs polygones et qui se projette sur le plan de F suivant f_n. On a

$$A(F'_n) \geqq A(f_n) = A(F) - \sigma_n.$$

En faisant la somme des relations analogues relatives aux différentes faces F de P_0, on aura

$$(2) \qquad A(P_n) \geqq \Sigma A(F'_n) \geqq \Sigma A(f_n) = A(P_0) - \Sigma\sigma_n.$$

Lorsque n croît indéfiniment, δ_n tend vers zéro; donc chacune des aires σ_n tend vers zéro et, comme leur nombre est fixe, $\Sigma\sigma_n$ tend vers zéro. L'inégalité

$$(3) \qquad A(P_0) - A(P_n) \leqq \Sigma\sigma_n$$

montre que si $A(P_n)$ tend vers une limite, cette limite est au moins égale à $A(P_0)$; on a donc

$$(4) \qquad A_\pi(P_0) \geqq A(P_0).$$

On déduit finalement de (1) et de (4)

$$A_\pi(P_0) = A(P_0).$$

Ainsi nous avons démontré que si l'on considère comme une fonction de surface l'aire $A(P)$ d'une surface polyédrale P, *la géométrie élémentaire nous fournit l'exemple d'une fonction* très simple et très importante qui *dans le champ* très simple, π, constitué par *l'ensemble des surfaces polyédrales : 1° n'est pas continue*, 2° *est semi-continue inférieurement.*

Remarques. — 1° Il y a lieu d'observer, — si l'on nous permet de sortir ici du domaine strict de la géométrie élémentaire — que la semi-continuité inférieure de $A(P)$ est en un certain sens uniforme dans le champ π, au voisinage de P_0.

En effet désignons par (P_0, P_n) et appelons distance des surfaces polyédrales (P_0, P_n) la borne inférieure du maximum δ_n de la distance de deux points correspondants de P_0 et de P_n, quand la correspondance H_n varie (¹). D'autre part, soit L_0 la somme des longueurs des arêtes de P_0, celles qui appartiennent à deux faces étant comptées deux fois. On aura

$$\Sigma\sigma_n \leqq (L_0 + 2r_0\delta_n)\delta_n,$$

r_0 étant le nombre des arêtes de P_0, comptée chacune autant de fois qu'il y aboutit de faces de P_0. D'où

$$A(P_0) - A(P_n) \leqq (L_0 + 2r_0\delta_n)\delta_n,$$

d'où

$$A(P_0) - A(P_n) \leqq [L_0 + 2r_0(P, P_n)](P, P_n). \tag{5}$$

Par suite on peut déterminer un nombre η tel que sous la seule condition $(P_0, P) < \eta$, on ait pour une surface polyédrale fixe P_0 et une surface polyédrale variable P :

$$A(P_0) - A(P) < \varepsilon \quad \text{pour} \quad (P_0, P) < \eta.$$

Il suffit de prendre

$$2(L_0 + r_0\eta)\eta < \varepsilon.$$

L'inégalité (5) n'est pas la plus stricte qu'on pourrait écrire connaissant P_0 et seulement (P_0, P_n). Il serait intéressant de la préciser.

2° Dans ce qui précède, la définition de la limite

(¹) C'est la même définition que nous avons adoptée dans le cas plus général de deux surfaces continues quelconques dans un travail paru dans les *Annales de la Soc. Math. polonaise*, t. II, sous le titre *Sur la distance de deux surfaces.*

d'une suite de surfaces que nous avons adoptée correspond à ce qu'en Calcul des Variations on appelle voisinage d'ordre zéro.

On sait qu'on peut considérer l'aire d'une surface courbe comme continue si l'on substitue à la définition de la limite adoptée plus haut celle qui correspond au voisinage d'ordre 1, c'est-à-dire celle où la correspondance entre deux surfaces voisines est telle que non seulement les points correspondants mais aussi leurs plans tangents soient voisins.

Mais il est manifeste que si l'on voulait introduire cette condition dans l'étude de l'aire des seules surfaces polyédrales on ne se débarrasserait de la discontinuité de l'aire qu'en introduisant la discontinuité des plans tangents.