NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Solutions de questions proposées

Nouvelles annales de mathématiques 5e série, tome 3 (1924), p. 196-200

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1924_5_3__196_1>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

2352.

(1918, p. 38.)

Soit ABA'B' *une section principale d'un ellipsoïde dont les axes sont* AA', BB', CC'. *Par le sommet* C, *on mène la parallèle* CD *à l'un des axes* AA' *de cette section; par le sommet* C', *la parallèle* C'D' *à l'autre axe* BB'. *Si une droite* Δ *se déplace en rencontrant constamment l'ellipse* ABA'B' *et les droites* CD *et* C'D', *le volume enfermé dans la portion de surface qu'engendre le segment de* Δ *compris entre les droites* CD *et* C'D' *est égal au volume de l'ellipsoïde.* M. D'OCAGNE.

SOLUTION

Par M. PHILBERT DU PLESSIS.

Les équations de la droite Δ sont de la forme

$$x = \lambda(z + c), \qquad y = \mu(z - c).$$

Écrivant qu'elle rencontre le plan $z = 0$ en un point de l'ellipse ABA'B', on a

$$\frac{\lambda^2 c^2}{a^2} + \frac{\mu^2 c^2}{b^2} = 1.$$

L'élimination de λ et μ entre ces trois équations fait connaître l'équation de la surface engendrée

$$\frac{c^2x^2}{a^2(c+z)^2}+\frac{c^2y^2}{b^2(c-z)^2}=1,$$

dont toutes les sections par des plans parallèles à Oxy sont des ellipses. Pour la cote z, la surface de cette section est

$$\sigma=\frac{\pi ab(c^2-z^2)}{c^2}.$$

Le volume demandé a donc pour expression

$$V=\frac{\pi ab}{c^2}\int_{-c}^{c}(c^2-z^2)\,dz=\frac{\pi ab}{c^2}\left[c^2z-\frac{z^3}{3}\right]_{-c}^{c}=\frac{4}{3}\pi abc,$$

ce qui démontre le théorème énoncé.

Autres solutions de MM. Bouvaist, Faucheux.

2471.

(1923-24, p. 350.)

On considère des cubiques circulaires Γ *formant un faisceau ponctuel linéaire. L'enveloppe de leurs asymptotes réelles est une hypocycloïde à trois rebroussements, dont le cercle tritangent* (K) *est égal, sans lui être identique, au cercle* (K') *lieu des foyers singuliers des courbes* Γ.

Si O *est le centre du cercle* (K'), *les directions asymptotiques de* Γ *issues de* O *coupent la courbe en six points à distance finie situés sur une conique* (S). *Les coniques* (S) *forment, lorsque* Γ *varie, un faisceau ponctuel. Pour que les cercles* (K) *et* (K') *soient confondus, il faut et il suffit que ce faisceau soit équilatère.* A. Labrousse.

Solution

Par le Commandant Pierre Sicard.

La cubique circulaire variable Γ peut être représentée par une équation de la forme suivante :

$$(\Gamma)\quad (x^2+y^2)(ax+by)+Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0,$$

les coefficients a, b, A, B, C, ... ayant respectivement les valeurs

$$(a_1 + \lambda_1 a_2), \quad (b_1 + \lambda b_2),$$
$$(A_1 + \lambda A_2), \quad (B_1 + \lambda B_2), \quad (C_1 + \lambda C_2), \quad \ldots,$$

fonctions du paramètre λ (variable).

En posant

$$\varphi_3(x, y) = (x^2 + y^2)(ax + by), \qquad \varphi_2 = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2,$$
$$\varphi_1 = 2Dx + 2Ey + F,$$

l'asymptote $y = cx + d$ de la cubique Γ, d'ordonnée à l'origine d, et de coefficient angulaire c, est donnée par l'équation

$$y = cx - \frac{\varphi_2(1, c)}{\varphi'_3(1, c)}.$$

Équation de l'asymtopte réelle :

$$(1) \qquad y = -\frac{a}{b}x - \frac{(Ab^2 - 2abB + Ca^2)}{b(a^2 + b^2)}.$$

Asymptote imaginaire (i) :

$$(2) \qquad y = ix - \frac{(A + 2Bi + Ci^2)}{(a + bi)2i}.$$

Asymptote imaginaire $(-i)$:

$$(3) \qquad y = -ix - \frac{(A - 2Bi + Ci^2)}{-(a - bi)2i}.$$

Enveloppe de l'asymptote réelle (1). — L'équation de cette asymptote peut s'écrire

$$(4) \quad (a^2 + b^2)ax + (a^2 + b^2)by + (Ab^2 - 2abB + Ca^2) = 0$$

et ses coordonnées tangentielles u, v, w sont donc données par le système suivant

$$(5) \qquad \frac{u}{a(a^2 + b^2)} = \frac{v}{b(a^2 + b^2)} = \frac{w}{Ab^2 - 2abB + Ca^2}$$

dont on déduit

$$(6) \qquad \frac{u}{a} = \frac{v}{b} = \frac{w(u^2 + v^2)}{Av^2 - 2uvB + Cu^2}.$$

L'équation tangentielle de l'enveloppe s'obtient par élimination de λ entre les deux équations (6). Cette équation tangentielle est de la forme

$$(7) \qquad \alpha u^3 + \beta v^3 + h(u^2 + v^2)w + (pu + qv)uv = 0,$$

les constantes α, β, h, p, q étant données par les équations suivantes :

$$\alpha = C_2 b_1 - C_1 b_2, \qquad \beta = A_1 a_2 - A_2 a_1, \qquad h = a_1 b_2 - a_2 b_1,$$
$$p = C_1 a_2 - C_2 a_1 + 2(B_1 b_2 - B_2 b_1),$$
$$q = A_2 b_1 - A_1 b_2 - 2(B_1 a_2 - B_2 a_1).$$

L'équation tangentielle (7) représente une courbe de troisième classe, bitangente à la droite de l'infini aux deux points cycliques. Cette courbe est, comme on sait, une hypocycloïde à trois rebroussements.

Cercle (K) *tritangent à l'hypocycloïde.* — Ce cercle (K) est concentrique du cercle (Ω), circonscrit aux trois points de rebroussement de l'hypocycloïde. Le rayon du cercle (K) est le tiers du rayon du cercle (Ω). Or l'équation ponctuelle du cercle (Ω) peut s'obtenir facilement. En cherchant les coordonnées (x, y) des points de rebroussements de l'hypocycloïde, c'est-à-dire les points (x, y) de la courbe où les deux tangentes sont confondues, on tombe directement sur l'équation du cercle (Ω) :

$$(\Omega) \qquad 2h^2(x^2 + y^2) - h(q + 3\alpha)x - h(p + 3\beta)y + q(3\alpha - q) + p(3\beta - p) = 0.$$

Le rayon R_Ω du cercle (Ω) est égal (comme il est facile de le vérifier) à $\frac{3}{4h}\sqrt{(q-\alpha)^2 + (p-\beta)^2}$.

Le rayon R_k du cercle (K) est donné par la formule

$$R_k = \frac{1}{4h}\sqrt{(q-\alpha)^2 + (p-\beta)^2}.$$

Equation du cercle (K'). (Lieu des foyers singuliers des courbes Γ.) — Le foyer x, y de la courbe (Γ) est le point réel, intersection des asymptotes imaginaires conjuguées définies par les équations (2) et (3). Ses coordonnées x, y sont définies par le système suivant :

$$(8) \qquad 2(by - ax) = (A - C),$$
$$(9) \qquad ay + bx = - B.$$

Le lieu de ce foyer, lorsque λ varie, s'obtient par élimination de λ entre (8) et (9). L'équation de ce lieu est

$$\begin{aligned} &2(a_1 b_2 - b_1 a_2)(x^2 + y^2) \\ &\quad + [b_1(C_2 - A_2) + b_2(A_1 - C_1) + 2(B_2 a_1 - B_1 a_2)]x \\ &\quad + [a_1(C_2 - A_2) + a_2(A_1 - C_1) + 2(B_1 b_2 - B_2 b_1)]y \\ &\qquad\qquad + B_1(C_2 - A_2) + B_2(A_1 - C_1) = 0. \end{aligned}$$

C'est l'équation du cercle (K'). Dès lors il est très facile de vérifier que le cercle (K') a même rayon R_k que le cercle (K).

Équation de la conique (S). — L'équation de la conique (S) (de l'énoncé) s'écrit immédiatement

$$\begin{aligned} (\mathrm{S}) \quad &(x^2 + y^2)(ax + by) + Ax^2 \\ &+ 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F \\ &- [(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2][a(x - \xi) + b(y - \eta)] = 0, \end{aligned}$$

en désignant par ξ, η les coordonnées du centre de K'.

Cette conique (S) est *équilatère*, *quel que soit le paramètre* λ, si les deux équations suivantes sont satisfaites

$$A_1 + C_1 + 4(a_1 \xi + b_1 \eta) = 0,$$
$$A_2 + C_2 + 4(a_2 \xi + b_2 \eta) = 0.$$

On en tire

$$4h\xi = b_1(A_2 + C_2) - b_2(A_1 + C_1),$$
$$4h\eta = a_2(A_1 + C_1) - a_1(A_2 + C_2),$$

et, tenu compte des valeurs de ξ et η, il reste

$$B_1 a_2 - B_2 a_1 = C_2 b_1 - C_1 b_2, \qquad B_1 b_2 - B_2 b_1 = A_2 a_1 - A_1 a_2;$$

il est bien aisé de vérifier que ce sont les conditions pour que les centres des cercles (Ω) et (K') coïncident.