

J. HAAG

Un théorème sur les produits infinis

Nouvelles annales de mathématiques 5^e série, tome 3
(1924), p. 195-196

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1924_5_3__195_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1924, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

UN THÉORÈME SUR LES PRODUITS INFINIS :

PAR J. HAAG.

Appelons *produit alterné* un produit infini dont les facteurs sont alternativement > 1 et < 1 .

THÉORÈME. — *Si, dans un produit alterné P, le produit de deux facteurs consécutifs est toujours compris entre le premier de ces facteurs et l'unité et si le facteur général tend vers un, le produit est convergent.*

En effet, soit P_n le produit des n premiers facteurs :

$$P_n = u_1 u_2 \dots u_n.$$

On a

$$\log P_n = S_n = \log u_1 + \log u_2 + \dots + \log u_n.$$

Je dis que la série $v_n = \log u_n$ est convergente.

D'abord, elle est alternée. Ensuite, ses termes décroissent en valeur absolue : car, si $u_n > 1$, on a

$$u_n u_{n+1} > 1, \quad \log u_n > -\log u_{n+1};$$

si $u_n < 1$, on a

$$u_n u_{n+1} < 1, \quad -\log u_n > \log u_{n+1}.$$

Enfin, v_n tend vers zéro, puisque u_n tend vers un.

La convergence de la série (v_n) résulte donc du théorème bien connu sur les séries alternées. La convergence du produit P en est une conséquence immédiate.

(196)

On sait que le reste R_n de la série a le signe de v_{n+1} et lui est inférieur en valeur absolue. Dès lors, si nous appelons *reste du produit* P, le produit infini convergent

- nous avons
$$Q_n = u_{n+1} u_{n+2} \dots,$$

$$\log Q_n = R_n$$

et nous pouvons affirmer que Q_n est compris entre un et le premier facteur négligé.