Nouvelles annales de mathématiques

A. Angelesco

Sur les polynômes hypergéométriques

Nouvelles annales de mathématiques 5e série, tome 3 (1924), p. 161-177

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1924_5_3__161_0>

SUR LES POLYNOMES HYPERGÉOMÉTRIQUES;

PAR A. ANGELESCO,

Professeur à l'Université de Cluj (Roumanie).

Les polynomes h [1] sont les polynomes déduits de la fonction de Gauss

$$(1)\qquad F(\alpha, \beta, \gamma, x) = 1 + \frac{\alpha.\beta}{1.\gamma}x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1.2\gamma(\gamma+1)}x^2 + \ldots,$$

en donnant à α des valeurs entières et négatives. Une suite de polynomes h sera donc une suite de polynomes F_n de la forme

$$F_n = F(-n, \beta_n, \gamma_n, x)$$

$n = 0, 1, 2, \ldots$ et où β_n et γ_n désignent des fonctions de n.

Nous ne savons pas si, en dehors des polynomes $F(-n, \beta+n, \gamma, x)$ de Jacobi [2] on a déjà étudié d'autres suites de polynomes h. Dans le présent travail, nous nous proposons d'étudier trois autres suites remarquables de polynomes h.

---

(1) Nous désignerons par la lettre h le mot *hypergéométrique*.

(2) *Voir*, pour la bibliographie complète des travaux sur les polynomes de Jacobi, l'article *Généralisations diverses des fonctions sphériques*, par MM. P. APPELL et A. LAMBERT, de l'*Encyclopedie des Sciences mathématiques*, édition française, t. II, vol. V, fasc. 2.

1. Considérons le développement de l'expression $(1+\alpha)^\lambda(1+\alpha x)^\mu$ suivant les puissances de α, λ et μ étant deux paramètres réels, et posons

$$(2)\qquad (1+\alpha)^\lambda(1+\alpha x)^\mu = \Sigma\alpha^n \mathrm{P}_n(x, \lambda, \mu).$$

On voit immédiatement que

$$(3)\quad \mathrm{P}_n(x, \lambda, \mu) = \frac{\lambda(\lambda-1)\ldots(\lambda-n+1)}{n!} + \frac{\mu}{1}\,\frac{\lambda(\lambda-1)\ldots(\lambda-n+2)}{(n-1)!}\,x + \ldots + \frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-n+1)}{n!}\,x^n,$$

ou bien, à l'aide de la fonction (1),

$$(4)\quad \mathrm{P}_n(x, \lambda, \mu) = \frac{\lambda(\lambda-1)\ldots(\lambda-n+1)}{n!}\,\mathrm{F}(-n, -\mu, \lambda-n+1, x).$$

Les polynomes P_n (¹) sont donc des polynomes h. D'après une formule de Jacobi, que nous retrouverons dans la suite, on a aussi

$$(5)\quad \mathrm{P}_n = \frac{1}{n!}\,x^{n-\lambda}(1-x)^{\lambda+\mu+1}\,\frac{d^n}{dx^n}\left[x^\lambda(1-x)^{n-\lambda-\mu-1}\right].$$

De la formule (4) il résulte que le polynome P_n satisfait à l'équation différentielle de Gauss

$$(6)\quad x(1-x)y'' + [\lambda+1-n+(n+\mu-1)x]y' - n\mu y = 0.$$

2. Du développement (2) on peut facilement déduire

(¹) Nous désignerons, le plus souvent, le polynome $\mathrm{P}_n(x, \lambda, \mu)$ par P_n.

un grand nombre de relations. Voici quelques-unes :

$$(7)\qquad \frac{dP_{n+1}}{dx} = \mu P_n - x\frac{dP_n}{dx} = \mu P_n(x, \lambda, \mu - 1),$$

$$(8)\qquad (n+2)P_{n+2} + [n+1-\lambda+(n+1-\mu)x]P_{n+1} + x(n-\lambda-\mu).P_n = 0,$$

$$(9)\qquad \frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-n+1)}{n!}x^n = \sum_{i=1}^{i=n}(-1)^i\frac{\lambda(\lambda+1)\ldots(\lambda+i-1)}{i!}P_{n-i},$$

$$(10)\qquad \frac{\lambda(\lambda-1)\ldots(\lambda-n+1)}{n!} = \sum_{i=0}^{i=n}(-1)^i\frac{\mu(\mu+1)\ldots(\mu+i-1)}{i!}x^i P_{n-i},$$

$$(11)\qquad P_n(x, \lambda+l, \mu+m) = \sum_{i=0}^{i=n} P_{n-i}(x, \lambda, \mu)P_i(x, l, m).$$

Remarquons, en passant, que de chacune des relations (8), (9) et (10), on peut déduire des expressions du polynome P_n sous forme de déterminants.

3. Pour mettre le polynome P_n sous forme d'intégrale, partons de l'égalité

$$(12)\qquad (1+\alpha)^\lambda = \frac{1}{\Gamma(-\lambda)}\int_0^\infty e^{-r(1+\alpha)}r^{-\lambda-1}\,dr,$$

$\lambda < 0$ et $|\alpha| < 1$, égalité qui se vérifie en changeant r en $\frac{y}{1+\alpha}$. On déduit de là

$$(13)\qquad (1+\alpha)^\lambda(1+\alpha x)^\mu = \frac{1}{\Gamma(-\lambda)\Gamma(-\mu)}\int\int e^{-r-s-\alpha(r+sx)}r^{-\lambda-1}s^{-\mu-1}\,dr\,ds,$$

$\lambda < 0$, $\mu < 0$, $|\alpha x| < 1$ et $|\alpha| < 1$, le domaine d'intégration étant $r \geqq 0$, $s \geqq 0$. Faisons, dans cette intégrale double, le changement

$$r = u(1 - v) \qquad \text{et} \qquad s = uv.$$

Le nouveau domaine sera

$$u \geqq 0, \qquad 0 \leqq v \leqq 1 \qquad \text{et} \qquad \left|\frac{D(r, s)}{D(u, v)}\right| = u,$$

de sorte que l'égalité précédente (13) deviendra

$$(1+\alpha)^\lambda(1+\alpha x)^\mu = \frac{1}{\Gamma(-\lambda)\,\Gamma(-\mu)} \int_0^\infty e^{-u}\, u^{-\lambda-\mu-1}\, du$$
$$\times \int_0^1 e^{-\alpha u(1-v+vx)}\,(1-v)^{-\lambda-1}\, v^{-\mu-1}\, dv.$$

En remplaçant le premier membre par son développement (2) et dans le second membre $e^{-\alpha u(1-v+vx)}$ par son développement, on obtient

$$(14) \qquad P_n = \frac{(-1)^n}{n!}\,\frac{\Gamma(n-\lambda-\mu)}{\Gamma(-\lambda)\,\Gamma(-\mu)}$$
$$\times \int_0^1 (vx + 1 - v)^n\,(1-v)^{-\lambda-1}\, v^{-\mu-1}\, dv,$$

formule qui se vérifie sans difficulté.

En multipliant les deux membres de (14) par α^n et en ajoutant ensuite les égalités obtenues en faisant $n = 0, 1, 2, \ldots$, on arrive à la formule

$$(15) \qquad (1+\alpha)^\lambda(1+\alpha x)^\mu$$
$$= A\int_0^1 [1 + \alpha(vx + 1 - v)]^{\lambda+\mu}\,(1-v)^{-\lambda-1}\, v^{-\mu-1}\, dv,$$

où l'on suppose $|\alpha| < 1$, $|\alpha x| < 1$ et où l'on a posé

$$A = \frac{\Gamma(-\lambda-\mu)}{\Gamma(-\lambda)\,\Gamma(-\mu)}.$$

Faisons quelques applications des formules (14) et (15).

a. Si dans la formule (14) nous remplaçons x par $(ux+1-u)$, en remarquant que

$$v(ux+1-u)+1-v=u(vx+1-v)+1-u,$$

on est conduit à l'égalité

$$\begin{aligned}&\mathrm{P}_n(ux+1-u,\lambda,\mu)\\&=\sum_{i=0}^{i=n}\frac{(\lambda+\mu-i)(\lambda+\mu-i-1)\ldots(\lambda+\mu-n)}{(n-i)!}u^i(1-u)^{n-i}\mathrm{P}_i.\end{aligned}$$

b. De la représentation par intégrale (14) on peut déduire, sous forme d'intégrale définie, un grand nombre de fonctions génératrices pour les polynomes P_n. Par exemple

$$\begin{aligned}&\mathrm{A}\int_0^1\frac{(1-v)^{-\lambda-1}v^{-\mu-1}\,dv}{1-\alpha(vx+1-v)}\\&=\sum\frac{n!}{(\lambda+\mu)(\lambda+\mu-1)\ldots(\lambda+\mu-n+1)}\alpha^n\mathrm{P}_n,\end{aligned}$$

où $|\alpha|<1$ et $|\alpha x|<1$;

$$\begin{aligned}(16)\qquad&\mathrm{A}\int_0^1 e^{\alpha(vx+1-v)}(1-v)^{-\lambda-1}v^{-\mu-1}\,dv\\&=\sum\frac{\alpha^n\mathrm{P}_n}{(\lambda+\mu)(\lambda+\mu-1)\ldots(\lambda+\mu-n+1)},\end{aligned}$$

égalité valable quels que soient α et x.

c. En multipliant les deux membres de (15) par $(1+\alpha)^k$ et en développant sous le signe d'intégration l'expression

$$(1+\alpha)^k[1+\alpha(vx+1-v)]^{\lambda+\mu}$$

par la formule (2), on arrive à l'égalité

$$\mathrm{P}_n(x,\lambda+k,\mu)=\mathrm{A}\int_0^1\mathrm{P}_n(vx+1-v,k,\lambda+\mu)(1-v)^{-\lambda-1}v^{-\mu}\,dv$$

qui généralise la formule (14), qu'on retrouve en faisant $k = 0$.

d. Changeons dans l'égalité (15) α en $-\alpha$ et puis multiplions ses deux membres par $\alpha^a(1-\alpha)^b$. En intégrant ensuite de 0 à 1, par rapport à α, et en tenant compte de l'égalité

$$\int_0^1 u^{a-1}(1-u)^{b-1}(1-xu)^{-c}\,du = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}\,\mathrm{F}(c, a, a+b, x),$$

qui se vérifie immédiatement, on arrive à la relation

$$\begin{aligned} &\mathrm{F}(\mu, a, a+b+\lambda, x) \\ &\quad = \frac{\mathrm{A}\,\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \int_0^1 \mathrm{F}(\lambda+\mu, a, a+b, vx+1-v) \\ &\qquad\qquad \times (1-v)^{-\lambda-1} v^{-\mu-1}\,dv, \end{aligned}$$

où l'on suppose $\lambda < 0$, $\mu < 0$, $\lambda + \mu > -1$, $b > -\lambda$, $a > 0$.

e. Transformons l'égalité (15) de manière à pouvoir déduire une autre représentation par intégrale des polynomes P_n. Remarquons d'abord que l'on a

$$1 + \alpha(vx + 1 - v) = (1 + \alpha x)v + (1 - v)(1 + \alpha),$$

de sorte que l'égalité (15) peut s'écrire

$$a^\lambda b^\mu = \mathrm{A} \int_0^1 [bv + (1-v)a]^{\lambda+\mu} (1-v)^{-\lambda-1} v^{-\mu-1}\,dv,$$

égalité qui est valable, en supposant a et b réels, pour $0 < a < 2$ et $0 < b < 2$. En remplaçant dans cette égalité a par $1 + t$ et b par $\frac{1}{x} + t$, nous obtiendrons

$$\begin{aligned} &(1+t)^\lambda (1+tx)^\mu \\ &\quad = \mathrm{A} x^{-\lambda} \int_0^1 [tx + v + (1-v)x]^{\lambda+\mu} (1-v)^{-\lambda-1} v^{-\mu-1}\,dv, \end{aligned}$$

égalité qui est valable, en particulier, pour $0 < t < 1$ et $x > 1$. Écrivons, sous le signe d'intégration, à la place de

$$[tx + v + (1 - v)x]^{\lambda+\mu}$$

l'expression équivalente

$$[v + (1 - v)x]^{\lambda+\mu}\left[1 + \frac{tx}{v + (1 - v)x}\right]^{\lambda+\mu}$$

où le second facteur sera remplacé par son développement suivant les puissances de $\frac{tx}{v + (1 - v)x}$, quantité qui reste, en valeur absolue, inférieure à l'unité pour v compris dans l'intervalle $(0, 1)$ si $x > 1$ et $tx < 1$. Nous sommes ainsi conduit à une autre représentation par intégrale

$$P_n = \frac{(-1)^n}{n!}\,\frac{\Gamma(n - \lambda - \mu)}{\Gamma(-\lambda)\Gamma(-\mu)}\,x^{n-\lambda}\int_0^1 [v + (1 - v)x]^{\lambda+\mu-n} v^{-\mu-1}\,dv.$$

Cette égalité, que nous avons obtenue dans l'hypothèse $x > 1$, est valable pour toute valeur positive de x.

4. Si dans le développement (2) nous faisons les changements

$$\alpha = \beta(y + \sqrt{y^2 - 1}), \qquad x = \frac{y - \sqrt{y^2 - 1}}{y + \sqrt{y^2 - 1}},$$

on obtient le développement

$$(17) \quad [1 + \beta(y + \sqrt{y^2 - 1})]^{\lambda}[1 + \beta(y - \sqrt{y^2 - 1})]^{\mu} = \Sigma\,\beta_n U_n$$

où

$$(18) \qquad U_n = (y + \sqrt{y^2 - 1})^n P_n\left(\frac{y - \sqrt{y^2 - 1}}{y + \sqrt{y^2 - 1}}, \lambda, \mu\right).$$

En faisant dans la formule (14) le changement de variable $v = \frac{u + 1}{2}$ et en tenant compte de (18), on voit que

$$U_n = \frac{(-1)^n}{n!} \frac{2^{\lambda+\mu+1}\Gamma(n-\lambda-\mu)}{\Gamma(-\lambda)\Gamma(-\mu)}$$
$$\times \int_{-1}^{+1} (y - u\sqrt{y^2-1})^n (1-u)^{-\lambda-1}(1+u)^{-\mu-1}\,du.$$

Cette formule nous permet de séparer, dans U_n, la partie rationnelle et la partie irrationnelle.

En supposant $\lambda = \mu$ le premier membre de (17) devient $(1 + 2\beta y + \beta^2)^\lambda$, de sorte que les fonctions U_n se réduisent aux polynomes de Gegenbauer.

Passons à une autre suite de polynomes h.

5. Dans le développement (2) changeons α en αx et x en $1 - \frac{1}{x}$; nous obtenons ainsi le développement

$$(19)\qquad (1 + \alpha x)^\lambda [1 + \alpha(x-1)]^\mu = \Sigma \alpha^n Q_n(x, \lambda, \mu),$$

où

$$(20)\qquad Q_n(x, \lambda, \mu) = x^n P_n\left(1 - \frac{1}{x}, \lambda, \mu\right).$$

Des relations obtenues pour les polynomes P_n on peut, à l'aide de la formule (20), déduire des relations en Q_n. En particulier de (8) et de (14) on déduit, en écrivant Q_n pour $Q_n(x, \lambda, \mu)$,

$$(21)\qquad (n+2)Q_{n+2} + [(n+1-\mu)(x-1) + (n+1-\lambda)x]Q_{n+1}$$
$$+ x(x-1)(n-\lambda-\mu)Q_n = 0,$$

$$Q_n = \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\Gamma(n-\lambda-\mu)}{\Gamma(-\lambda)\Gamma(-\mu)} \int_0^1 (x-v)^n (1-v)^{-\lambda-1} v^{-\mu-1}\,dv.$$

De cette dernière relation il résulte que

$$\frac{dQ_{n+1}}{dx} = (\lambda + \mu - n)Q_n,$$

ce qui nous montre que les polynomes Q_n forment une suite de M. Appell. Donc, à l'aide de la formule de récurrence (21), on trouve l'équation différentielle

$$(22)\quad x(1-x)y'' + [\mu - n + 1 - (\lambda + \mu - 2n + 2)x]y' + n(\lambda + \mu - n + 1)y = 0$$

à laquelle satisfait le polynome Q_n. Cette équation étant une équation de Gauss, le polynome Q_n sera un polynome h et l'on voit que

$$(23)\quad Q_n = (-1)^n \frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-n+1)}{n!} \times F(-n, \lambda+\mu+1-n, \mu+1-n, x).$$

6. Mettons, sans utiliser la formule de Jacobi, le polynome Q_n sous une forme analogue à (5). Partons pour cela du développement suivant les puissances de α, de l'expression $(1-x-\alpha)^\lambda(x+\alpha)^\mu$, par la formule de Taylor, donc du développement

$$(24)\quad x^\mu(1-x)^\lambda \left[1+\frac{\alpha}{x-1}\right]^\lambda \left[1+\frac{\alpha}{x}\right]^\mu = \sum \frac{\alpha^n}{n!}\left[\frac{d^n}{d\alpha^n}[(1-x-\alpha)^\lambda(x+\alpha)^\mu]\right]_{\alpha=0}.$$

En remarquant que

$$\left[\frac{d^n}{d\alpha^n}[(1-x-\alpha)^\lambda(x+\alpha)^\mu]\right]_{\alpha=0} = \frac{d^n}{dx^n}[(1-x)^\lambda x^\mu]$$

et en changeant dans le développement (24) α en $\alpha x(x-1)$ nous déduisons que

$$(25)\quad Q_n = \frac{(-1)^n}{n!} x^{n-\mu}(1-x)^{n-\lambda} \frac{d^n}{dx^n}[x^\mu(1-x)^\lambda].$$

En comparant les formules (23) et (25) on a la formule de Jacobi

$$F(-n, \lambda+\mu+1-n, \mu+1-n, x) = \frac{x^{n-\mu}(1-x)^{n-\lambda}}{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-n+1)} \frac{d^n}{dx^n}[x^\mu(1-x)^\lambda],$$

formule que nous avons utilisée précédemment.

7. Les polynomes Q_n se relient d'une autre manière simple aux polynomes P_n. En effet, changeons dans la formule (23) λ et μ respectivement en $n-\lambda-\mu-1$ et λ ; nous voyons alors, en tenant compte de (4), que

$$P_n(x, \lambda, \mu) = (-1)^n Q_n(x, n-\lambda-\mu-1, \lambda).$$

Par suite, les deux relations

$$P_n(x, \lambda, \mu) = (-x)^n P_n\left(1-\frac{1}{x}, n-\lambda-\mu-1, \lambda\right),$$

$$Q_n(x, \lambda, \mu) = (-x)^n Q_n\left(1-\frac{1}{x}, n-\lambda-\mu-1, \lambda\right).$$

Les polynomes P_n et Q_n satisfont donc à une même équation fonctionnelle.

8. Nous avons vu que les polynomes Q_n forment une suite de M. Appell. Du développement (16) on déduit

$$A e^{\alpha x}\int_0^1 e^{-\alpha v}(1-v)^{-\lambda-1}v^{-\mu-1}\,dv = \sum \frac{\alpha^n Q_n(x, \lambda, \mu)}{(\lambda+\mu)(\lambda+\mu-1)\ldots(\lambda+\mu-n+1)}.$$

La fonction génératrice, au sens de M. Appell, est

$$A\int_0^1 e^{-\alpha v}(1-v)^{-\lambda-1}v^{-\mu-1}\,dv,$$

donc la fonction de Kummer

$$(27)\quad \sum \frac{(-1)^n}{n!}\,\frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-n+1)}{(\lambda+\mu)(\lambda+\mu-1)\ldots(\lambda+\mu-n+1)}\,\alpha^n.$$

9. Les seuls polynomes h, formant une suite de M. Appell, sont les polynomes Q_n. En effet, les polynomes V_n, étant des polynomes h, ils doivent satisfaire

à l'équation différentielle

$$(28) \quad x(1-x)y'' + [\gamma_n - (\beta_n - n + 1)x]y' + n\beta_n y = 0,$$

β_n et γ_n étant des fonctions de n. Ces polynomes formant une suite de M. Appell, V_{n-1} est égal, à un facteur constant près, à V'_n. En dérivant l'équation (28) par rapport à x, on voit que l'on doit avoir

$$\beta_n = \beta_{n-1} - 1 \quad \text{et} \quad \gamma_n = \gamma_{n-1} - 1.$$

Donc

$$\beta_n = \beta_0 - n \quad \text{et} \quad \gamma_n = \gamma_0 - n.$$

De sorte que, en prenant $\beta_0 = \lambda + \mu + 1$ et $\gamma_0 = \mu + 1$, l'équation (28) devient identique à l'équation différentielle (22) des Q_n.

Nous allons considérer une dernière suite de polynomes h.

10. Nous déduirons cette nouvelle suite du développement (2) en changeant x en $(1 - x)$. Posons

$$(1+\alpha)^\lambda [1 + \alpha(1-x)]^\mu = \Sigma \alpha^n R_n(x, \lambda, \mu),$$

donc

$$R_n(x, \lambda, \mu) = P_n(1 - x, \lambda, \mu).$$

De l'équation (6) on déduit l'équation différentielle

$$x(1-x)y'' - [\lambda + \mu - (n + \mu - 1)x]y' - n\mu y = 0$$

à laquelle satisfait le polynome $R_n(x, \lambda, \mu)$. Donc

$$R_n(x, \lambda, \mu) = \frac{(\lambda+\mu)(\lambda+\mu-1)\ldots(\lambda+\mu-n+1)}{n!} \times F(-n, -\mu, -\lambda-\mu, x).$$

En appliquant la formule (26) de Jacobi, nous voyons que

$$R_n = \frac{(-1)^n}{n!} x^{\lambda+\mu+1}(1-x)^{n-\lambda} \frac{d^n}{dx^n}[x^{n-\lambda-\mu-1}(1-x)^\lambda].$$

Nous voyons, comme précédemment, que

$$P_n(x, \lambda, \mu) = (-1)^n R_n(x, -\mu-\lambda+n-1, \mu),$$
$$R_n(x, \lambda, \mu) = (-1)^n R_n(1-x, -\mu-\lambda+n-1, \mu),$$
$$P_n(x, \lambda, \mu) = (-1)^n P_n(1-x, -\mu-\lambda+n-1, \mu).$$

Indiquons, enfin, la formule

$$R_n(x, \lambda, \mu) = \frac{(-1)^n}{n!}\frac{\Gamma(n-\lambda-\mu)}{\Gamma(-\lambda)\Gamma(-\mu)} \times \int_0^1 (1-vx)^n(1-v)^{-\lambda-1} v^{-\mu-1}\, dv$$

qui nous montre que

$$\lim_{n=\infty} \frac{n!\, R_n\left(\frac{x}{n}, \lambda, \mu\right)}{(\lambda+\mu)(\lambda+\mu-1)\ldots(\lambda+\mu-n+1)} = A\int_0^1 e^{-vx}(1-v)^{-\lambda-1} v^{-\mu-1}\, dv.$$

L'intégrale du second membre a pour expression la fonction (27). Les polynomes R_n se réduisent donc, dans un cas limite, aux fonctions de Kummer.

Nous allons considérer à présent d'autres suites de polynomes, qui ne sont plus des polynomes h, mais qui se relient d'une manière très simple aux polynomes P_n, Q_n et R_n.

11. Changeons, dans le développement (2), x en $\frac{x}{\mu}$ et faisons ensuite croître μ indéfiniment. Nous sommes conduit au développement

$$(1+\alpha)^\lambda e^{\alpha x} = \Sigma \alpha^n A_n(x, \lambda), \tag{29}$$

où

$$A_n(x, \lambda) = \lim_{\mu=\infty} P_n\left(\frac{x}{\mu}, \lambda, \mu\right),$$

donc, d'après la formule (3),

$$A_n(x, \lambda) = \frac{\lambda(\lambda-1)\ldots(\lambda-n+1)}{n!} + \frac{\lambda(\lambda-1)\ldots(\lambda-n+2)}{(n-1)!}\frac{x}{1} + \ldots + \frac{x^n}{n!}.$$

De la relation (5) il résulte que

$$(30) \qquad A_n(x, y) = \frac{1}{n!} x^{n-\lambda} e^{-x} \frac{d^n x^\lambda e^x}{dx^n};$$

et de l'équation (6) on obtient l'équation différentielle

$$xy'' + (\lambda + 1 - n + x)y' - ny = 0$$

à laquelle satisfait le polynome A_n.

De la formule (14) on peut déduire la représentation par intégrale du polynome A_n. Il est plus simple de partir de l'égalité (12), qui peut s'écrire, après avoir multiplié ses deux membres par $e^{\alpha x}$,

$$(1+\alpha)^\lambda e^{\alpha x} = \frac{1}{\Gamma(-\lambda)} \int_0^\infty e^{-u} e^{\alpha(x-u)} u^{-\lambda-1}\, du,$$

de sorte que, en développant les deux membres d'après les puissances de α, on obtient la formule

$$(31) \qquad A_n(x, \lambda) = \frac{1}{n!\,\Gamma(-\lambda)} \int_0^\infty e^{-u} u^{-\lambda-1} (x-u)^n\, du,$$

$|\alpha| < 1$, formule que l'on peut vérifier facilement et sur laquelle on voit que les polynomes $A_n(x, \lambda)$ forment une suite de M. Appell.

12. Si dans le développement (2) nous changeons α en $\frac{\alpha}{\lambda}$ et x en λx et nous faisons ensuite croître λ indéfiniment, nous avons le développement

$$(32) \qquad e^\alpha (1 + \alpha x)^\mu = \Sigma \alpha^n B_n(x, \mu),$$

où

$$B_n(x, \mu) = \lim_{\lambda=\infty} \frac{P_n(\lambda x, \lambda, \mu)}{\lambda^n}.$$

Donc, d'après (3),

$$B_n(x, \mu) = \frac{1}{n!} + \frac{\mu}{(n-1)!}\frac{x}{1} + \frac{\mu(\mu-1)}{(n-2)!}\frac{x^2}{2!} + \ldots$$
$$+ \mu(\mu-1)\ldots(\mu-n+1)\frac{x^n}{n!}.$$

De la formule (5) écrite sous la forme

$$P_n = \frac{(-1)^n}{n!} x^{n+\mu+1}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{\lambda+\mu+1}$$
$$\times \frac{d^n}{dx^n}\left[x^{n-\mu-1}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{n-\lambda-\mu-1}\right]$$

on déduit

$$(33) \qquad B_n(x, \mu) = \frac{(-1)^n}{n!} x^{n+\mu-1} e^{-\frac{1}{x}} \frac{d^n x^{n-\mu-1} e^{\frac{1}{x}}}{dx^n}.$$

En faisant $\mu = 0$, dans cette formule, on retrouve une formule d'Halphen

De l'équation (5) on obtient l'équation différentielle

$$x^2 y'' - [1 + (n+\mu-1)x]y' + n\mu y = 0$$

à laquelle satisfait le polynome B_n.

Entre les polynomes précédents A_n et les polynomes B_n il y a la relation simple

$$B_n(x, \lambda) = x^n A_n\left(\frac{1}{x}, \lambda\right),$$

de sorte que de la formule (31) on déduit

$$(34) \qquad B_n(x, \lambda) = \frac{1}{n!\,\Gamma(-\lambda)} \int_0^\infty e^{-u} u^{-\lambda-1}(1-xu)^n\, du;$$

d'où il résulte l'égalité limite

$$\lim_{n=\infty} n!\,\mathrm{B}_n\left(\frac{x}{n}, \lambda\right) = \frac{1}{\Gamma(-\lambda)}\int_0^\infty e^{-u(1+x)}u^{-\lambda-1}\,du;$$

donc, en tenant compte de (12),

$$\lim_{n=\infty} n!\,\mathrm{B}_n\left(\frac{x}{n}, \lambda\right) = (1+x)^\lambda.$$

pour $|x| < 1$.

13. Écrivons le développement (2) sous la forme

$$(1+\alpha)^\gamma\left[1+\frac{\alpha x}{\mu(1+\alpha)}\right]^\mu = \Sigma\,\alpha^n\,\mathrm{P}_n\left(1+\frac{x}{\mu}, \gamma-\mu, \mu\right)$$

et faisons ensuite croître μ indéfiniment. Nous sommes conduit au développement

$$(1+\alpha)^\gamma\,e^{\frac{\alpha x}{1+\alpha}} = \Sigma\,\alpha^n\,\mathrm{C}_n(x, \gamma).$$

Les polynomes $\mathrm{C}_n(x, \gamma)$ sont les polynomes de Kummer [1] et se relient au polynome P_n par l'égalité limite

$$\mathrm{C}_n(x, \gamma) = \lim_{\mu=\infty} \mathrm{P}_n\left(1+\frac{x}{\mu}, \gamma-\mu, \mu\right).$$

De la formule (5) on déduit la relation connue

$$\mathrm{C}_n(x, \gamma) = (-1)^n\,\frac{x^{1+\gamma}e^x}{n!}\,\frac{d^n}{dx^n}(x^{n-\gamma-1}e^{-x}),$$

---

(1) *Voir* la *Monographie des polynomes de Kummer*, par M. P. Humbert, dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques*, décembre 1922.

laquelle comparée à (30) nous montre que

$$C_n(x, \gamma) = (-1)^n A_n(-x, n-\gamma-1).$$

Donc, en tenant compte de (31),

$$(35) \quad C_n(x, \gamma) = \frac{1}{n!\,\Gamma(\gamma-n+1)} \int_0^\infty e^{-u} u^{\gamma-n}(x+u)^n \, du,$$

formule qui est peut-être nouvelle.

Nous allons considérer une dernière suite de polynomes que nous déduirons du développement (19).

14. Écrivons le développement (19) sous la forme

$$(1+\alpha x)^\lambda \left[1 - \frac{\alpha}{\mu(1+\alpha x)}\right]^\mu = \sum \left(\frac{\alpha}{\mu}\right)^n Q_n(\mu x, \lambda-\mu, \mu),$$

et faisons croître μ indéfiniment. Nous sommes conduit au développement

$$(1-\alpha x)^\lambda e^{\frac{-\alpha}{1+\alpha x}} = \Sigma \alpha^n D_n(x, \lambda),$$

où

$$D_n(x, \lambda) = \lim_{\mu=\infty} \frac{1}{\mu^n} Q_n(\mu x, \lambda-\mu, \mu).$$

De même que nous avons déduit la formule (33) de (5), on déduit de (25) la formule

$$D_n(x, \lambda) = \frac{e^{-\frac{1}{x}} x^{2n-\lambda}}{n!} \frac{d^n}{dx^n}\left(x^\lambda e^{\frac{1}{x}}\right).$$

De l'équation différentielle (22) on obtient l'équation

$$x^2 y'' - [1 + (2n-\lambda-2)x]y' + n(n-\lambda-1)y = 0$$

à laquelle satisfait le polynome $D_n(x, \lambda)$.

Les polynomes D_n se rattachent aux polynomes C_n

et B_n par les relations simples

$$D_n(x, \lambda) = x^n C_n\left(-\frac{1}{x}, \lambda\right),$$

$$D_n(x, \lambda) = (-1)^n B_n(x, n-\lambda-1).$$

A l'aide de ces relations on déduit, soit de (34), soit de (35) la représentation par intégrale

$$D_n(x, \lambda) = \frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(\lambda-n+1)}\int_0^\infty e^{-u}u^{\lambda-n}(1-ux)^n\,du.$$

15. Pour terminer, remarquons que des suites de polynomes considérées, on peut déduire encore d'autres suites. Partons, par exemple, du développement (2). On a

$$(1+\alpha)^\lambda[(1+\alpha x)^\mu - 1] = \Sigma\alpha^n\left[P_n - \frac{\lambda(\lambda-1)\ldots(\lambda-n+1)}{n!}\right].$$

En divisant les deux membres de cette égalité par μ et en faisant ensuite tendre μ vers zéro, nous aurons

$$(1+\alpha)^\lambda \operatorname{Log}(1+\alpha x) = \Sigma\alpha^n E_n(x, \lambda),$$

où

$$E_n(x, \lambda) = \lim_{\mu=0}\frac{1}{\mu}\left[P_n - \frac{\lambda(\lambda-1)\ldots(\lambda-n+1)}{n!}\right].$$

Au polynome P_n se rattachent encore les polynomes qui proviennent du développement des expressions

$$(1+\alpha x)^\mu \operatorname{Log}(1+\alpha), \qquad \operatorname{Log}[(1+\alpha)(1+\alpha x)].$$

A tous les autres polynomes considérés se rattachent, de la même manière, d'autres suites de polynomes. Leur étude ne nous paraît pas présenter un intérêt particulier.

Sur le développement des fonctions en séries des polynomes considérés, de même que sur l'extension, au cas de plusieurs variables, de ces polynomes, nous nous proposons de revenir.