Certificats de mathématiques générales

Nouvelles annales de mathématiques 5e série, tome 3 (1924), p. 155-160

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1924_5_3__155_1>

CERTIFICATS DE MATHÉMATIQUES GÉNÉRALES.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. 1° *Vérifier que la fonction* $y = e^x$ *est solution de l'équation différentielle*

$$(1) \qquad \frac{d^3y}{dx^3} - 3\frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} - 2y = 0$$

---

(1) *Voir* notre *Cours de Géométrie pure et appliquée de l'École Polytechnique*, t. I. p. 277.

(2) *Ibid.*, p. 274, et fascicule complémentaire, p. 18.

et déterminer la solution générale de cette équation.

2° *Intégrer l'équation différentielle*

$$(2)\qquad \frac{d^3y}{dx^3} - 3\frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} - 2y = 6\,e^x\cos 3x$$

et déterminer la solution particulière y_1 qui est un infiniment petit d'ordre 3 par rapport à x.

3° *Figurer la courbe représentative de la fonction y_1 de x et calculer l'aire comprise entre Ox et l'arc de la courbe obtenu pour x variant de 0 à π.*

II. *On considère l'ellipse (E) définie, en coordonnées rectangulaires, par l'équation*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \qquad (a > b).$$

Soient : M *un point variable de cette ellipse;* T *et* T′ *les points d'intersection de la tangente en* M *avec Ox et Oy;* N *et* N′ *les points d'intersection de la normale en* M *avec Ox et Oy;* P *le milieu de* TT′ *et* Q *le milieu de* NN′.

Former l'équation du lieu géométrique de P, *celle du lieu de* Q, *et déterminer le point de contact de la droite* PQ *avec son enveloppe.*

Indications sur la solution par M. A. Sade. — I. En posant $y = z\,e^x$, les équations (1) et (2) deviennent respectivement

$$z''' + z' = 0, \qquad z''' + z' = 6\cos 3x,$$

et l'intégration est immédiate. L'intégrale générale de (2) sera

$$y = e^x\left[A + B\cos x + C\sin x - \frac{\sin 3x}{4}\right]$$

et l'intégrale particulière demandée est

$$y_1 = e^x\left(\frac{3\sin x - \sin 3x}{4}\right) = e^x\sin^3 x.$$

L'aire demandée vaut

$$\frac{3}{10}(1 + e^\pi).$$

II. x, y étant les coordonnées du point M, les coordonnées du point P sont

$$X = \frac{a^2}{2x}, \qquad Y = \frac{b^2}{2y},$$

d'où, en tenant compte de l'équation de l'ellipse, le lieu, facile à construire,

$$a^2 Y^2 + b^2 X^2 = 4 X^2 Y^2.$$

Le lieu du point Q est l'ellipse

$$(\mathrm{E}') \qquad \frac{X^3}{\left(\dfrac{a^2-b^2}{2a}\right)^2} + \frac{Y^2}{\left(\dfrac{a^2-b^2}{2b}\right)^2} = 1.$$

La droite PQ a pour équation

$$Xx - Yy = \frac{a^2-b^2}{2}$$

et touche son enveloppe au point Q; l'enveloppe est l'ellipse (E').

Épreuve pratique. — *Des trois séries de termes généraux*

$$u_n = \operatorname{tang}\left(\frac{n+1}{n+2}\pi\right), \qquad v_n = \frac{1}{(\operatorname{ch} n)^2},$$
$$w_n = \frac{\log(n^2+1) - \log n^2}{n^3},$$

reconnaître celles qui sont convergentes et calculer leur somme avec une erreur inférieure à 0,001.

Nota. — Chx désigne le cosinus hyperbolique de x; log$x$ désigne le logarithme décimal de x.

Indications sur la solution. — 1° u_n a pour partie principale $\frac{\pi}{n}$, la série correspondante est donc divergente.

2° La seconde série se comporte comme la série de terme général e^{-2n} et est donc convergente. On vérifie aisément que le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ est toujours inférieur à $\frac{1}{2}$. L'erreur commise en s'arrêtant à un terme de la série est donc toujours inférieure au dernier terme non négligé. La somme de la série est 0,502.

3° On a

$$w_n = \log e \frac{L\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}{n^3} < \frac{\log e}{n^5};$$

la série converge. Elle a pour somme 0,315.

(Caen, juin 1924.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. *Développer l'intégrale*

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-ex^p}},$$

suivant les puissances croissantes de e. Calculer le rayon de convergence de la série obtenue. Donner une vérification directe du développement trouvé, dans les cas particuliers $p = 2$, 1 *et* $\frac{1}{2}$.

II. *Chercher les normales abaissées d'un point quelconque de* Oz *sur la courbe*

$$x = 5t, \qquad y = 2t^2\sqrt{2}, \qquad z = t^3,$$

Discuter leur réalité.

III. *Un point* M, *de masse* 2, *est attiré par deux points fixes* A *et* B *suivant une force égale à la distance. On le lance, à partir d'une position quelconque* M_0 *prise sur* AB, *avec la vitesse* M_0V_0 *perpendiculaire à* Ox. *Déterminer le mouvement qui prend naissance. On considère toutes les trajectoires* T *obtenues en faisant varier* M_0V_0 *de telle manière que* V_0 *décrive un cercle de diamètre* AB. *On demande l'enveloppe de ces trajectoires, ainsi que leurs trajectoires orthogonales.*

INDICATIONS SUR LA SOLUTION, par M. A. SADE. — I. On trouve la série

$$1+\sum_{1}^{\infty}{}_{n} \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.5\ldots 2n} \frac{e^n}{1+np}$$

dont le rayon de convergence est égal à *un*.

II. Les normales issues du point (o, o, Z) seront déterminées par l'équation

$$x'x+y'y+z'z-z'Z=0$$

qui s'écrit (en écartant la solution $t=0$)

$$3t^3+16t+\frac{25}{t}=3Z;$$

en étudiant les variations du premier membre, on constate qu'il y a 2 ou 0 solutions suivant que Z est extérieur ou non à l'intervalle $-\frac{44}{3}, +\frac{44}{3}$.

III. Tout se passe comme si le point M était attiré par le milieu de AB (origine des coordonnées) suivant une force égale au double de la distance. La détermination du mouvement est donc immédiate.

En se bornant ici, pour être bref, au cas où les points A et B sont sur Ox, on constatera que les trajectoires T ont pour enveloppe le losange formé par les quatre droites

$$\pm x \pm y\sqrt{2}=r \qquad (r = \text{rayon du cercle}).$$

Les trajectoires orthogonales dépendent de l'intégration de l'équation différentielle

$$(x+yy'_x)(xy'_x+2y)=r^2y'_x$$

qui, en prenant pour variable $X=x^2$, $Y=y^2$, se ramène à une équation de Lagrange.

Épreuve pratique. — *Un cylindre de révolution de rayon r est limité à deux sections droites dont la distance est h; il est formé d'une substance homogène et sa masse est m. Une demi-sphère de rayon r est limitée par un plan dia-*

métral et sa section par ce plan coïncide avec l'une des bases du cylindre; elle est formée d'une substance homogène et sa masse est M. *On fait osciller le solide ainsi constitué autour d'un diamètre* AB *de celles des bases du cylindre sur laquelle n'est pas fixée la demi-sphère; cet axe* AB *est fixé horizontalement.*

Trouver la longueur du pendule simple synchrone. Application numérique :

$$r = 3^{\text{cm}}; \qquad h = 50^{\text{cm}}; \qquad m = 852^{\text{g}},32; \qquad M = 641^{\text{g}},66.$$

SOLUTION. — On trouve

$$l = 2\,\frac{M\left(h^2 + \dfrac{3hr}{4} + \dfrac{r^2}{5}\right) + m\left(\dfrac{h^2}{3} + \dfrac{r^2}{4}\right)}{M\left(h + \dfrac{3r}{4}\right) + (M + m)h} = 43^{\text{cm}},9.$$

(Clermont, juin 1924.)

ERRATUM.

Dans le numéro de décembre 1924, page 97, ligne 4, de la note (1), *il faut lire* « ordinaires », *au lieu de* « polaires ».

La Rédaction des *N. A.* tient à indiquer que l'Auteur de l'article n'est en rien responsable de cette erreur de transcription, que nos lecteurs auront déjà rectifiée.