Nouvelles annales de mathématiques

P. Vincensini

Sur une propriété de la développante du cercle et de l'hélicoïde développable

Nouvelles annales de mathématiques 5e série, tome 3 (1924), p. 147-153

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1924_5_3__147_1>

SUR UNE PROPRIÉTÉ DE LA DÉVELOPPANTE DU CERCLE ET DE L'HÉLICOÏDE DÉVELOPPABLE;

Par P. VINCENSINI.

I. Dans un article sur la géométrie de la formule de Stokes, M. A. Buhl a établi (*N. A.*, octobre 1923) qu'une cloison S appartenant à l'hélicoïde

$$z = h\theta + F(r)$$

engendre un volume d'axe Oz égal à $2\pi h S'$, S' étant l'aire de la projection de S sur xOy, On déduit immédiatement de là une propriété intéressante de l'hélicoïde développable. Pour un tel hélicoïde on a

$$\frac{S'}{S} = K = \frac{R}{\sqrt{h^2 + R^2}}$$

(h étant le pas réduit des hélices de l'hélicoïde, R le rayon du cylindre qui porte l'hélice de rebroussement) et

$$V = \frac{2\pi h R}{\sqrt{h^2 + R^2}} S,$$

V ne dépend que de S.

Toutes les cloisons de même surface prises sur l'hélicoïde engendrent par rotation autour de Oz *des volumes tournants égaux.*

II. Il paraît intéressant de démontrer que cette propriété curieuse de l'hélicoïde développable se rattache à une propriété analogue de la développante du cercle. Cela fera ressortir le caractère géométrique du théorème précédent.

Rappelons tout d'abord que O étant un point fixe d'un plan, ds un élément d'arc d'une courbe du plan et α l'angle du rayon vecteur OM qui va à l'élément, avec la tangente à cet élément, l'aire dA engendrée par la rotation de ds autour de O a pour expression

$$dA = 2\pi r \cos\alpha \, ds. \tag{1}$$

L'aire engendrée par un arc fini a pour expression

$$A = 2\pi \int_{s_1}^{s_2} r \cos\alpha \, ds.$$

La formule (1) permet de rechercher les courbes pour lesquelles il existe une relation donnée entre A et s. Examinons le cas simple où l'on veut que A soit proportionnelle à s.

Dans ce cas $2\pi r \cos\alpha = K$ (constante)

$$r \cos\alpha = \frac{K}{2\pi}.$$

Si l'on abaisse les perpendiculaires OH et OI sur la tangente et sur la normale à la courbe cherchée on voit que $r\cos\alpha$ ne représente autre chose que MH ou OI. OI étant constant, la normale à la courbe cherchée, enveloppe un cercle de centre O, et la courbe est une développante du cercle O. On peut donc dire :

Sur une développante de cercle tous les arcs de même longueur engendrent des aires égales en tournant autour du centre du cercle.

La façon dont l'hélicoïde développable peut être engendré au moyen de développantes de cercles, conduit assez naturellement à se demander s'il n'existe pas, entre les aires de cloisons appartenant à un tel hélicoïde et les volumes engendrés par la rotation de ces cloisons autour de l'axe de l'hélicoïde, une relation analogue à celle qui vient d'être établie pour les développantes de cercle.

Soit S une cloison de contour C, tracée sur l'hélicoïde lieu des tangentes à l'hélice circulaire d'équations

$$x = R\cos\theta, \qquad y = R\sin\theta, \qquad z = h\theta.$$

Le volume engendré par S en tournant autour de l'axe Oz de l'hélicoïde a pour expression

$$V = \int_{z_1}^{z_2} A\, dz,$$

A désignant l'aire engendrée par l'arc de développante du plan de cote z, compris à l'intérieur de S, dans sa rotation autour de Oz, z_1 et z_2 les cotes du point le plus bas et le plus haut du contour C. A a pour expression : $A = 2\pi R l$ (l longueur de l'arc de développante). On a donc

$$V = 2\pi R \int_S l\,dz \quad \text{(intégrale attachée à S).}$$

Soient S′ la projection de S sur xOy, C′ le contour de S′; l'arc de développante de cote z envisagé plus haut se projette suivant un arc égal de longueur l compris dans S′ [*fig.* (1)]. Transformons l'intégrale attachée à S en une intégrale attachée à S′.

On a

$$dz = h\,d\theta.$$

D'autre part, si m et n sont les points où les projections des développantes de cotes z et $z + dz$ rencontrent la

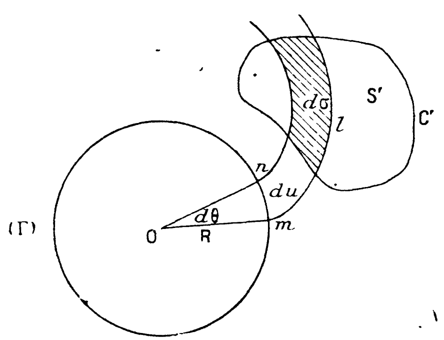

Fig. 1.

circonférence Γ du plan xOy de centre O et de rayon R, et si l'on désigne par du la longueur de l'arc mn de Γ, longueur qui représente la distance des deux développantes projections, on pourra écrire

$$l\,dz = lh\,d\theta = lh\,\frac{du}{\mathrm{R}}.$$

Dans ces conditions,

$$\int_{\mathrm{S}} l\,dz = \frac{h}{\mathrm{R}}\int_{\mathrm{S}'} l\,du = \frac{h}{\mathrm{R}}\int_{\mathrm{S}'} d\sigma$$

($d\sigma$ étant l'aire limitée dans S′ par les deux développantes).

On peut donc écrire

$$\mathrm{V} = 2\pi h\int_{\mathrm{S}'} d\sigma = 2\pi h\mathrm{S}'.$$

Mais on sait que

$$\mathrm{S}' = \mathrm{KS}, \qquad \left(\mathrm{K} = \frac{\mathrm{R}}{\sqrt{h^2+\mathrm{R}^2}}\right).$$

On a donc

$$\mathrm{V} = \frac{2\pi h\mathrm{RS}}{\sqrt{h^2+\mathrm{R}^2}}.$$

Cette formule montre que V ne dépend que de S, et pas du tout du contour de S sur l'hélicoïde.

Toutes les cloisons de même surface, tracées sur un hélicoïde développable, engendrent des volumes égaux en tournant autour de l'axe de l'hélicoïde.

Ce résultat est tout à fait analogue à celui trouvé pour les développantes de cercle.

III. Indiquons avant de terminer quelques applications très simples de la formule (1) du n° II.

Proposons-nous de déterminer une courbe plane (C) telle qu'un arc quelconque de cette courbe tournant de deux points O et O′ du plan engendre des aires qui soient dans un rapport constant.

Si M est un point quelconque de (C) MT la tangente à (C) en M, et si H et H′ sont les projections de O et O′ sur la normale en M, la relation

$$r' \cos\alpha' = \mathrm{K} r \cos\alpha$$

montre que $\frac{\mathrm{O'H'}}{\mathrm{OH}} = \mathrm{K}$.

La normale à C rencontre OO′ en un point ω tel que $\frac{\omega \mathrm{O'}}{\omega \mathrm{O}} = \mathrm{K}$. Il y a deux points répondant à la question (ω, ω_1). Les courbes cherchées se partagent en deux séries; celles de l'une des séries ont leurs normales passant par ω, ce sont des circonférenees de centre ω; celles de l'autre série sont des circonférences de centre ω_1.

Réciproquement, on peut dire qu'étant donnée une circonférence Γ de centre ω et deux points O, O′ en ligne droite avec ω, le rapport des surfaces engendrées par un arc quelconque de Γ en tournant autour de O et O′ est égal à $\frac{\omega \mathrm{O}}{\omega \mathrm{O'}}$.

Ce résultat, qui s'établit d'ailleurs très simplement par la géométrie (3e livre), donne l'idée de comparer les volumes engendrés par une cloison portée par une surface de révolution, tournant autour de deux axes parallèles à l'axe de la surface et situés dans un même plan avec cet axe.

Soient S une cloison située snr une surface de révolution d'axe Ω; D et Δ les deux axes de rotation ω; O, O′ les points d'intersection de $\Omega \mathrm{D} \Delta$ avec un plan P perpendiculaire à Ω (*fig.* 2).

Soit Π un plan parallèle à P coupant Ω, D, Δ en ω_1, O_1, O'_1 et S suivant l'arc de cercle l. Les aires engendrées par (l) en tournant autour de D et Δ sont dans le rapport $\frac{\omega_1 \mathrm{O}_1}{\omega_1 \mathrm{O}'_1} = \frac{\omega \mathrm{O}}{\omega \mathrm{O'}}$.

Les volumes engendrés par S en tournant autour de D et Δ sont dès lors dans ce même rapport comme le montre une intégration immédiate.

Si la surface de révolution, qui porte la cloison S, est une sphère quelconque de centre O, on peut dire

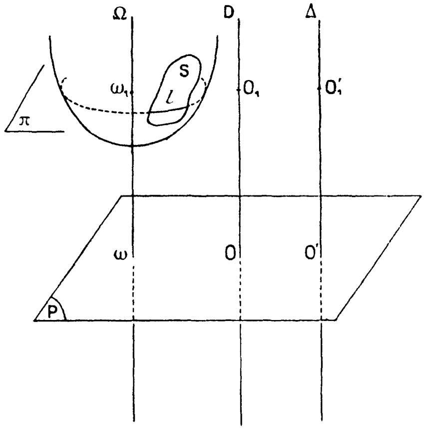

Fig. 2.

que le rapport des volumes engendrés par la rotation de S autour de deux axes parallèles quelconques, situés dans un plan passant par O, est indépendant de la cloison S, et est égal au rapport des distances de O aux deux axes de rotation.

Ces deux résultats ont été établis par M. A. Buhl (*N. A.*, juin 1924). Je signale cette démonstration parce qu'elle ne nécessite que la connaissance de propriétés tout à fait élémentaires.