NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

J. HAAG

# Sur la fonction eulérienne

*Nouvelles annales de mathématiques 5e série*, tome 3 (1924), p. 121-146

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1924_5_3__121_0>

[E1]

# SUR LA FONCTION EULÉRIENNE ;

PAR J. HAAG.

La fonction eulérienne de seconde espèce est une des transcendantes qui ont suscité le plus de travaux. Ses élégantes propriétés sont devenues classiques et nous n'avons nullement la prétention d'en découvrir de nouvelles. L'article qui va suivre a seulement pour but de rassembler les plus connues, en les développant suivant une méthode que nous croyons originale et particulièrement simple. Cette méthode fait d'ailleurs appel aux théories les plus diverses de l'Analyse et paraît devoir constituer, à ce titre, un excellent exercice pour la plupart des lecteurs de ce journal.

**1.** Prenons comme définition la formule bien connue ([1])

$$(1) \qquad \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1}\, dt \qquad (x > 0).$$

Nous allons démontrer la formule suivante ([2]), qui sera notre *formule fondamentale :*

$$(2) \qquad \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = -C + \int_0^1 \frac{1 - t^{x-1}}{1 - t}\, dt,$$

C désignant la *constante d'Euler*.

([1]) *Cf.* GOURSAT, *Cours d'Analyse mathématique*, t. I, p. 206.

([2]) Cette formule est également connue. (*Cf.* N. NIELSEN, *Handbuch der Theorie der Gammafunktion*, Leipzig, 1906, p. 170). Toutefois, elle est généralement peu utilisée. En outre, on ne l'éta-

La dérivée qu'il s'agit de calculer peut être considérée comme étant la limite, pour $y=0$, de l'expression

$$(3)\quad \frac{\Gamma(x+y)-\Gamma(x)}{y\,\Gamma(x+y)}=\frac{1}{y}-\frac{B(x,y)}{y\,\Gamma(y)}$$
$$=\frac{1}{y}-B(x,y)+B(x,y)\left[1-\frac{1}{y\,\Gamma(y)}\right],$$

en introduisant la fonction eulérienne de première espèce [1]

$$(4)\qquad B(x,y)=\frac{\Gamma(x)\,\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt.$$

Or, on a

$$\frac{1}{y}=\int_0^1 (1-t)^{y-1}\,dt;$$

d'où

$$\frac{1}{y}-B(x,y)=\int_0^1 \frac{1-t^{x-1}}{(1-t)^{1-y}}\,dt$$

dont la limite, pour $y=0$, est précisément l'intégrale [2] de la formule (2).

Quant au troisième terme de (3), il peut s'écrire, en utilisant de nouveau la formule (4),

$$\frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x+y)}\;\frac{y\,\Gamma(y)-1}{y}.$$

Le premier facteur tend vers 1. Le second est égal à $\frac{\Gamma(1+y)-\Gamma(1)}{y}$. Il tend donc vers la dérivée $\Gamma'(1)$,

---

blit pas directement, mais comme conséquence de la formule (7) qui va suivre.

(1) *Cf.* Goursat, *loc. cit.*, p. 315.

(2) La fonction sous le signe $\int$ est discontinue par rapport à $y$ pour $t=1$, $y=0$, car, pour $t=1$, sa valeur est $x-1$, si $y=0$ et zéro, si $y>0$. L'intégrale est néanmoins continue, parce que la fonction est uniformément bornée dans le voisinage des valeurs considérées. Elle est, en effet, majorée par la fonction $\frac{|1-t^{x-1}|}{1-t}$, qui reste finie pour $t=1$.

c'est-à-dire vers (1)

$$\int_0^{+\infty} e^{-t} \log t \, dt = -C \quad (^2).$$

Finalement, la formule (2) est démontrée.

Nous allons maintenant en tirer les conséquences.

2. Nous avons d'abord

$$(6) \qquad \frac{1-t^{x-1}}{1-t} = \sum_{n=0}^{p-1} (t^n - t^{n+x-1}) + \frac{t^p(1-t^{x-1})}{1-t}.$$

Si l'on intègre entre $0$ et $1$, l'intégrale du dernier terme est inférieure à $\frac{M}{p}$, M désignant une limite supérieure de la fonction $\frac{t-t^x}{1-t}$, qui est finie pour toutes les valeurs de l'intervalle d'intégration. Lorsque $p$ augmente indéfiniment, cette intégrale tend vers zéro. On a donc

$$(7) \qquad \begin{aligned} \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} &= -C + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+x}\right) \\ &= -C + (x-1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+x)}, \end{aligned}$$

ce qui est une formule bien connue (3).

---

(1) D'une manière générale, on a

$$(5) \qquad \Gamma'(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} \log t \, dt.$$

La différentiation sous le signe $\int$ est permise, parce que l'intégrale (5) est uniformément convergente par rapport à ses deux bornes. La fonction sous le signe $\int$ est, en effet, comprise, pour $a < x < b$ et, quel que soit $t$, entre les fonctions $e^{-t} t^{a-1} \log t$ et $e^{-t} t^{b-1} \log t$, lesquelles font converger l'intégrale.

(2) *Cf.* Hermite, *Cours autographié de la Faculté des Sciences de Paris*, p. 93. Cette formule peut servir de définition à la constante d'Euler.

(3) *Cf.* Hermite, *loc. cit.*

En changeant $x$ en $x+1$ et intégrant de $0$ à $x$, après avoir remarqué que la série du troisième membre est majorée par la série de terme général $\frac{1}{(n+1)^2}$, on obtient [1]

$$(8) \qquad \log\frac{1}{\Gamma(x+1)} = Cx + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\log\left(1+\frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n}\right];$$

d'où

$$(9) \qquad \frac{1}{\Gamma(x+1)} = e^{Cx}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)e^{-\frac{x}{n}}.$$

Si l'on fait $x=1$ dans la formule (8), en se souvenant que $\Gamma(2)=1$, il vient

$$C = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n} - \log\left(1+\frac{1}{n}\right)\right] = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n} - \log(n+1) + \log n\right]$$

ou

$$C = \lim_{n=\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n} - \log n\right);$$

on retrouve la définition bien connue de la constante d'Euler. Portant cette valeur dans (9), il vient

$$\begin{aligned}\frac{1}{\Gamma(x+1)} &= \lim_{n=\infty}\frac{(1+x)\left(1+\frac{x}{2}\right)\cdots\left(1+\frac{x}{n}\right)}{n^x}\\ &= \lim_{n=\infty}\frac{(1+x)(2+x)\ldots(n+x)}{n!\,n^x}.\end{aligned}$$

En changeant $x$ en $x-1$, $n$ en $n+1$ et remarquant que $\frac{n^x}{(n+1)^x}$ tend vers $1$, on retrouve la formule de

---

[1] *Cf.* HERMITE, *loc. cit.*, p. 93.

Gauss [1] :

$$\Gamma(x) = \lim_{n=\infty} \frac{n!\, n^x}{x(x+1)(x+2)\ldots(x+n)}. \tag{10}$$

**3.** Nous allons maintenant établir la formule [2]

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x} \qquad (0 < x < 1). \tag{11}$$

Cherchons à évaluer la dérivée logarithmique du premier membre, soit

$$X = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} - \frac{\Gamma'(1-x)}{\Gamma(1-x)}.$$

D'après la formule (2), on a

$$X = \int_0^1 \frac{t^{-x} - t^{x-1}}{1-t}\, dt.$$

Posons

$$t = e^{-2z}, \qquad 2x - 1 = u;$$

il vient

$$X = 2\int_0^{+\infty} \frac{e^{uz} - e^{-uz}}{e^z - e^{-z}}\, dz$$
$$= 2\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sh} uz}{\operatorname{sh} z}\, dz = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{sh} uz}{\operatorname{sh} z}\, dz.$$

Pour calculer cette dernière intégrale, nous allons appliquer la méthode des résidus. Les pôles de la fonction sous le signe $\int$ sont $z = ik\pi$, $k$ étant un entier non nul. Intégrons le long du rectangle ABCD, dont les côtés sont définis par

AB : $z = ai$;  DC : $z = bi$;  BC . $x = R$;  AD : $x = -R$.

---

[1] *Cf.* Hermite, *loc. cit.*, p. 91. *Voir* aussi Borel, *Leçons sur la théorie de la croissance*, p. 91.

[2] *Cf.* Goursat, *loc. cit.*, p. 315.

Le long de BC et le long de DA, on a

$$\left|\frac{\operatorname{sh} u z}{\operatorname{sh} z}\right| < \frac{e^{uR} + e^{-uR}}{e^{R} - e^{-R}}.$$

La somme des deux intégrales correspondantes est donc inférieure, en module, à

$$2(b-a)\frac{e^{uR} + e^{-uR}}{e^{R} - e^{-R}}.$$

Comme $-1 < u < 1$, cette quantité tend vers zéro quand R croît indéfiniment. Il en est donc de même des intégrales le long de BC et de DA. Il s'ensuit que, si l'on pose

$$f(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{sh} u(t+iy)}{\operatorname{sh}(t+iy)}\,dt$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{sh} ut \cos uy - i \operatorname{ch} ut \sin uy}{\operatorname{sh} t \cos y + i \operatorname{ch} t \sin y}\,dt,$$

on a, en supposant $a < b$,

$$f(a) - f(b) = 2\pi i\,\Sigma\,\mathrm{R},$$

$\Sigma$R désignant la somme des résidus relatifs aux pôles compris entre les deux droites $z = ai$, $z = bi$.

Prenons d'abord $a = 0$, $b = \frac{\pi}{2}$; nous avons

$$\mathrm{X} = f\left(\frac{\pi}{2}\right). \tag{12}$$

Prenons maintenant $a = \frac{\pi}{2}$, $b = \frac{3\pi}{2}$; il vient

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) - f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 2\pi i\,\frac{\operatorname{sh} iu\pi}{\operatorname{ch} i\pi} = 2\pi \sin \pi u. \tag{13}$$

Or

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\operatorname{sh} ut\cos u\frac{\pi}{2}+i\operatorname{ch} ut\sin u\frac{\pi}{2}}{i\operatorname{ch} t}\,dt$$

$$=\sin u\frac{\pi}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\operatorname{ch} ut}{\operatorname{ch} t}\,dt,$$

$$f\left(\frac{3\pi}{2}\right)=-\sin\frac{3u\pi}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\operatorname{ch} ut}{\operatorname{ch} t}\,dt=-f\left(\frac{\pi}{2}\right)\frac{\sin\frac{3u\pi}{2}}{\sin\frac{u\pi}{2}}.$$

En portant dans (13), on obtient, par un calcul simple,

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\pi\operatorname{tang}\frac{u\pi}{2};$$

d'où ([1])

$$X=\pi\operatorname{tang}\frac{u\pi}{2}=-\pi\cot\pi x. \tag{14}$$

Intégrons :

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x)=\frac{A}{\sin\pi x}.$$

Pour avoir la constante A, cherchons la limite de $x\Gamma(x)\Gamma(1-x)=\Gamma(1+x)\Gamma(1-x)$, lorsque $x$ tend vers zéro. Cette limite est, d'une part, $\Gamma(1)\Gamma(1)=1$ ; d'autre part, $\frac{A}{\pi}$. Donc, $A=\pi$ et nous retrouvons bien la formule (11).

*Remarque.* — On peut aussi calculer X au moyen

---

([1]) Cette formule peut être obtenue comme cas particulier d'une formule plus générale établie par Hermite (*loc. cit.*, p. 115), par une méthode qui revient, au fond, à celle que nous venons de suivre.

de la formule (7) :

$$X = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1}{n+1-x} - \frac{1}{n+x} \right)$$

$$= -\frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n-x} - \frac{1}{n+x} \right) = -\frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x}{n^2 - x^2}.$$

En comparant avec (14), on retrouve le développement bien connu de $\pi \cot \pi x$ [1].

4. Démontrons encore la formule [2]

$$(15) \qquad \frac{\Gamma(x)\,\Gamma\left(x+\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(x+\frac{2}{n}\right)\cdots\Gamma\left(x+\frac{n-1}{n}\right)}{\Gamma(nx)} = (2\pi)^{\frac{n-1}{2}}\, n^{\frac{1}{2}-x}.$$

Si nous appelons X le premier membre, nous avons

$$\frac{X'}{X} = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} + \frac{\Gamma'\left(x+\frac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(x+\frac{1}{n}\right)} + \ldots + \frac{\Gamma'\left(x+\frac{n-1}{n}\right)}{\Gamma\left(x+\frac{n-1}{n}\right)} - n\,\frac{\Gamma'(nx)}{\Gamma(nx)},$$

ou, en appliquant la formule (2),

$$\frac{X'}{X} = \int_0^1 \frac{n t^{nx-1} - t^{x-1}\left(1 + t^{\frac{1}{n}} + t^{\frac{2}{n}} + \ldots + t^{\frac{n-1}{n}}\right)}{1-t}\,dt$$

$$= \int_0^1 \left( \frac{n t^{nx-1}}{1-t} - \frac{t^{x-1}}{1-t^{\frac{1}{n}}} \right) dt.$$

Faisons le changement de variables

$$t = e^{-2nz}, \qquad 1 - 2nx = y;$$

---

(1) *Cf.* Goursat, *loc. cit.*, t. II, p. 174.
(2) *Cf.* Hermite, *loc. cit.*, p. 97.

il vient

$$Y = \frac{X'}{X} = n\int_0^{+\infty}\left(\frac{n\,e^{nyz}}{\operatorname{sh} nz} - \frac{e^{yz}}{\operatorname{sh} z}\right)dz. \tag{16}$$

Dérivons par rapport à $y$ :

$$Y' = n\int_0^{+\infty}\left(\frac{n^2 z\,e^{nyz}}{\operatorname{sh} nz} - \frac{z\,e^{yz}}{\operatorname{sh} z}\right)dz. \tag{17}$$

Cette dérivation est permise, car l'intégrale (17) est uniformément convergente pour $y < a < 1$ [1]. En effet, la fonction sous le signe $\int$ est majorée par $\frac{n^2 z e^{naz}}{\operatorname{sh} nz} + \frac{z e^{az}}{\operatorname{sh} z}$, dont l'intégrale est convergente.

La formule (17) peut maintenant s'écrire

$$\frac{Y'}{n} = \int_0^{+\infty}\frac{n^2 z\,e^{nyz}}{\operatorname{sh} nz}\,dz - \int_0^{+\infty}\frac{z\,e^{yz}}{\operatorname{sh} z}\,dz.$$

La première intégrale égale la seconde, comme on s'en rend compte en faisant le changement de variable : $nz = t$. Donc,

$$Y' = 0, \qquad Y = \text{const.}$$

Pour déterminer cette constante, faisons $y = 0$ dans (16) ; il vient

$$\frac{Y}{n} = \int_0^{+\infty}\left(\frac{n}{\operatorname{sh} nz} - \frac{1}{\operatorname{sh} z}\right)dz = -\lim_{z=0}\left(\log\frac{\operatorname{th}\frac{nz}{2}}{\operatorname{th}\frac{z}{2}}\right) = -\log n.$$

Nous avons donc

$$\frac{X'}{X} = -n\log n;$$

d'où, en intégrant,

$$X = An^{-nx}. \tag{18}$$

---

[1] Cette inégalité résulte de ce que $x$ doit toujours être supposé positif.

Pour déterminer la constante A, supposons que $x$ tende vers zéro. Nous avons, en remarquant que

$$\lim \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(nx)} = n \lim \frac{x\,\Gamma(x)}{nx\,\Gamma(nx)} = n \lim \frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(nx+1)} = n,$$

$$A = n\,\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\cdots\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right).$$

Renversons l'ordre des facteurs et multiplions membre à membre ; il vient, en utilisant la formule (11),

$$A^2 = \frac{n^2\pi^{n-1}}{\sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{2\pi}{n}\cdots\sin\frac{(n-1)\pi}{n}}.$$

Le produit du dénominateur se calcule aisément, en considérant le produit des racines de l'équation qui donne $\sin\frac{a}{2n}$, connaissant $\cos a = 1$. On trouve finalement

$$A = (2\pi)^{\frac{n-1}{2}} n^{\frac{1}{2}}.$$

En portant dans (18), on obtient bien la formule (15).

5. Nous allons maintenant établir la *formule asymptotique* donnant $\Gamma(x)$ pour les grandes valeurs de $x$.

Nous partons toujours de la formule (2), que nous écrivons, en faisant le changement de variable $t = e^{-z}$,

$$(19) \qquad \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = -C + \int_0^{+\infty} \frac{e^{-z} - e^{-zx}}{1 - e^{-z}}\,dz.$$

Développons $\frac{z}{1-e^{-z}}$ suivant les puissances croissantes de $z$. On pourrait employer, à cet effet, la formule de Mac Laurin, sous sa forme élémentaire classique. Mais, pour avoir une limite supérieure du reste, il est plus avantageux d'utiliser la méthode bien connue de l'intégrale de Cauchy. Considérons l'intégrale

$$I = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{z\,dz}{(1-e^{-z})(z-x)},$$

prise le long du rectangle ABCD, dont les côtés sont définis par

BC : $z = a$; AD : $z = -a$; DC : $z = ib$; AB : $z = -ib$;

$a$ et $b$ étant deux nombres positifs, dont le premier est plus grand que $x$ et le second plus petit que $2\pi$. La fonction sous le signe $\int$ n'admet que le pôle $z = x$ dans ce rectangle. Donc

$$I = \frac{x}{1-e^{-x}}.$$

D'autre part, on peut écrire

$$(20) \qquad I = \sum_{p=0}^{m} \frac{x^p}{2\pi i}\int \frac{dz}{(1-e^{-z})z^p} + \frac{x^{m+1}}{2\pi i}\int \frac{dz}{(1-e^{-z})z^m(z-x)}.$$

Le coefficient de $x^p$ peut être calculé en remplaçant le chemin d'intégration par une circonférence infiniment petite de centre O. C'est donc le coefficient de $x^p$ dans le développement de I en série entière. Ce développement, valable pour $|x| < 2\pi$, s'exprime au moyen des nombres de Bernoulli (¹); de sorte qu'en prenant $m = 2n+1$, nous pouvons écrire (20) sous la forme

$$(21) \qquad \frac{x}{1-e^{-x}} = 1 + \frac{x}{2} + \sum_{p=1}^{n} (-1)^{p-1} B_p \frac{x^{2p}}{(2p)!} + R_n,$$

(¹) *Cf.* Hermite, *loc. cit.*, p. 98.

en posant

$$(22)\quad R_n = \frac{x^{2n+2}}{2\pi i}\int \frac{dz}{(1-e^{-z})\,z^{2n+1}(z-x)} = x^{2n+2}\,I_n.$$

Il serait aisé de déduire directement de cette formule une limite supérieure de $|I_n|$. Mais, il est plus avantageux d'évaluer cette intégrale par la méthode des résidus. Si l'on intègre le long d'un autre rectangle $A'B'C'D'$, correspondant à des valeurs plus grandes de $a$ et de $b$, on obtient une nouvelle intégrale telle que $I'_n - I_n$ égale la somme des résidus relatifs aux pôles compris entre les deux rectangles. Ces pôles sont $2k\pi i$, $k$ représentant l'un quelconque des nombres entiers non nuls compris entre $-\frac{b'}{2\pi}$ et $\frac{b'}{2\pi}$.

D'autre part, le module de la fonction $\psi$ sous le signe $\int$ est bornée supérieurement, sur $B'C'$, par $\frac{1}{(1-e^{-a'})\,a'^{2n+1}(a'-x)}$. L'intégrale le long de $B'C'$ a donc un module inférieur à $\frac{2b'}{(1-e^{-a'})\,a'^{2n+1}(a'-x)}$. Il s'ensuit qu'elle tend vers zéro quand $a'$ augmente indéfiniment. Il en est de même de l'intégrale le long de $D'A'$. On peut donc remplacer le rectangle $A'B'C'D'$ par les deux droites indéfinies $A'B'$ et $C'D'$.

Prenons maintenant $b'$ tel que $\frac{b'}{\pi}$ soit un nombre entier impair. Pour $z = \pm ib' + t$, on a

$$|\psi| = \frac{1}{(1+e^{-t})(t^2+b'^2)^{n+\frac{1}{2}}\sqrt{b'^2+(t-x)^2}}$$
$$< \frac{1}{b'(t^2+b'^2)^{n+\frac{1}{2}}}.$$

Les intégrales le long de $A'B'$ et de $C'D'$ ont donc des modules inférieurs à

$$\frac{2}{b'}\int_0^{+\infty}\frac{dt}{(t^2+b'^2)^{n+\frac{1}{2}}}=\frac{2}{b'^{2n+1}}\int_0^{+\infty}\frac{du}{(u^2+1)^{n+\frac{1}{2}}}.$$

Elles tendent vers zéro quand $b'$ croît indéfiniment.

En définitive, $-\mathrm{I}_n$ est égal à la somme de la série formée par les résidus $\mathrm{A}_k$ des pôles $2k\pi i$. Or, on a

$$\mathrm{A}_k=\frac{1}{(2k\pi i)^{2n+1}(2k\pi i-x)},$$

$$\mathrm{A}_k+\mathrm{A}_{-k}=(-1)^n\frac{-2}{(2k\pi)^{2n}(4k^2\pi^2+x^2)}.$$

Donc,

$$(23)\qquad \mathrm{I}_n=2(-1)^n\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k\pi)^{2n}(4k^2\pi^2+x^2)}.$$

Lorsque $x$ croît de $0$ à $+\infty$, $\mathrm{I}_n$ varie toujours dans le même sens.

Pour $x=0$, la formule (22) montre que [1]

$$\mathrm{I}_n=(-1)^n\frac{\mathrm{B}_{n+1}}{(2n+2)!}.$$

Pour $x=+\infty$, on a $\mathrm{I}_n=0$. Donc, si $x$ a une valeur positive quelconque, on a [2]

$$(24)\qquad \mathrm{R}_n=(-1)^n\frac{\theta\,\mathrm{B}_{n+1}}{(2n+2)!}x^{2n+2},$$

$\theta$ désignant un nombre compris entre $0$ et $1$.

---

[1] En comparant avec ce que donne la formule (23), on obtient la formule bien connue

$$(25)\qquad \mathrm{S}_{2n}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{2n}}=\frac{2^{2n-1}\pi^{2n}}{(2n)!}\mathrm{B}_n$$

[2] L'analyse qui précède ne diffère pas essentiellement de celle d'Hermite (*loc. cit.*, p. 105).

La limite supérieure $\frac{B_{n+1}}{(2n+2)!}$, que nous venons d'obtenir pour $|I_n|$, est certainement la plus avantageuse qui soit indépendante de $x$, puisqu'elle est effectivement atteinte lorsque $x$ tend vers zéro.

6. Portons maintenant (21) dans (19); il vient

$$(26)\quad \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = -C + \int_0^{+\infty} \frac{e^{-z} - e^{-zx}}{z}\, dz + \int_0^{+\infty} \frac{e^{-z}}{z}\left(\frac{z}{1-e^{-z}} - 1\right) dz$$
$$- \int_0^{+\infty} e^{-zx}\left[\frac{1}{2} + \sum_{p=1}^{n} (-1)^{p-1} B_p \frac{z^{2p-1}}{(2p)!} + \frac{1}{z} R_n(z)\right] dz.$$

Pour calculer la première intégrale, prenons sa dérivée par rapport à $x$; cette dérivée est [1]

$$\int_0^{+\infty} e^{-zx}\, dz = \frac{1}{x}.$$

Donc l'intégrale en question est égale à $\log x$, puisque, d'autre part, elle est nulle pour $x = 1$.

La deuxième intégrale est indépendante de $x$. Désignons-la par $A + C$.

Nous avons, en faisant le changement de variable $zx = t$ dans la troisième intégrale,

$$\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = A + \log x - \int_0^{+\infty} e^{-t}\left[\frac{1}{2x} - \sum_{p=1}^{n} (-1)^{p-1} \frac{B_p}{(2p)!} \frac{t^{2p-1}}{x^{2p}} + \frac{1}{t} R_n\left(\frac{t}{x}\right)\right] dt.$$

$$(27)\quad \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = A + \log x - \frac{1}{2x} - \sum_{p=1}^{n} (-1)^{p-1} \frac{B_p}{2p\, x^{2p}} - \rho_n(x),$$

[1] L'intégrale obtenue est uniformément convergente, car $e^{-zx}$ est majorée par $e^{-za}$, si $x < a$.

en posant [1]

$$(28)\quad \rho_n(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}\,\mathrm{R}_n\left(\frac{t}{x}\right)}{t}\,dt = (-1)^n\theta\,\frac{\mathrm{B}_{n+1}}{(2n+2)x^{2n+2}}$$

$$(0 < \theta < 1).$$

Posons

$$\Phi(x) = \log\Gamma(x) + \left(\frac{1}{2} - x\right)\log x + x.$$

Nous avons, en intégrant (27),

$$(29)\quad \Phi(x) = \mathrm{A}x + \sum_{p=1}^{n}(-1)^{p-1}\frac{\mathrm{B}_p}{2p(2p-1)x^{2p-1}} + r_n(x) + \mathrm{K},$$

avec [2]

$$(30)\quad r_n(x) = -\int_{+\infty}^{x} \rho_n(x)\,dx = (-1)^n\theta\,\frac{\mathrm{B}_{n+1}}{(2n+2)(2n+1)x^{2n+1}}$$

et $\mathrm{K} = \text{const.}$

Supposons maintenant que $x$ augmente indéfiniment. Les termes en $\frac{1}{x}$ tendent vers zéro, ainsi que $r_n(x)$, d'après (30). Quant au premier membre, on sait qu'il tend vers $\log\sqrt{2\pi}$. Il s'ensuit que A est nécessairement nul [3] et que $\mathrm{K} = \log\sqrt{2\pi}$. On a donc la formule

---

[1] On a appliqué la formule de la moyenne au facteur $\theta$ de la formule (24), dont le coefficient reste positif dans tout l'intervalle d'intégration.

[2] On a appliqué la formule de la moyenne au facteur $\theta$ de la formule (28).

[3] On en déduit que l'intégrale

$$\mathrm{I} = \int_0^{+\infty}\frac{e^{-z}}{z}\left(\frac{z}{1-e^{-z}} - 1\right)dz$$

est égale à la constante d'Euler. C'est ce qu'il est aisé de vérifier asymptotique (¹)

$$(31)\quad \log\Gamma(x) = \left(x-\frac{1}{2}\right)\log x - x + \log\sqrt{2\pi} + \sum_{p=1}^{n}(-1)^{p-1}\frac{B_p}{2p(2p-1)x^{2p-1}} + r_n(x).$$

Si l'on s'arrête à un terme quelconque, l'erreur commise a le signe du premier terme négligé et lui est inférieure en valeur absolue. Cette erreur tend vers zéro quand $x$ croît indéfiniment. Mais, pour une valeur donnée de $x$, la série obtenue en poursuivant indéfiniment le développement est divergente, car son terme général est supérieur en valeur absolue à (²)

$$\frac{2(2n)!}{(2\pi)^{2n}\,2n(2n-1)x^{2n-1}} = \frac{2(2n-2)!}{(2\pi)^{2n}x^{2n-1}},$$

ce qui augmente indéfiniment avec $n$.

---

directement. On a

$$I = \lim_{\varepsilon=0}\left[\int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{e^{-z}\,dz}{1-e^{-z}} - \int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{e^{-z}}{z}\,dz\right]$$

$$= \lim_{\varepsilon=0}\left[-\log(1-e^{-\varepsilon}) - \int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{e^{-z}}{z}\,dz\right],$$

$$I = \lim_{\varepsilon=0}\left(-\log\varepsilon - \int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{e^{-z}}{z}\,dz\right).$$

D'autre part, on a (n° 1)

$$C = -\int_{0}^{+\infty} e^{-t}\log t\,dt = \lim_{\varepsilon=0}\int_{\varepsilon}^{\infty} - e^{-t}\log t\,dt.$$

Or, en intégrant par parties, la seconde intégrale devient (*cf.* HERMITE, p. 94) :

$$-e^{-\varepsilon}\log\varepsilon - \int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{e^{-t}}{t}\,dt,$$

qui a même limite que l'expression ci-dessus.

(¹) *Cf.* HERMITE, p. 98 et 105.

(²) *Cf.* inégalité (42).

7. Nous avons admis tout à l'heure que la limite de $\Phi(x)$ pour $x=\infty$ était $\log\sqrt{2\pi}$. Bien que cette propriété soit classique, nous allons encore la démontrer, par une méthode qui nous paraît nouvelle et instructive.

On a

$$\varphi(x)=e^{\Phi(x)}=\Gamma(x)\,x^{\frac{1}{2}-x}\,e^{x}=\int_{0}^{+\infty}e^{-z}z^{x-1}x^{\frac{1}{2}-x}\,e^{x}\,dz,$$

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}\int_{0}^{+\infty}e^{x-z}\left(\frac{z}{x}\right)^{x-1}dz.$$

Faisons le changement de variable $\frac{z}{x}=t$; il vient

$$\varphi(x)=\sqrt{x}\int_{0}^{+\infty}e^{x(1-t)}t^{x-1}\,dt=\sqrt{x}\int_{0}^{+\infty}e^{x(1-t)+(x-1)\log t}\,dt,$$

dont il faut chercher la limite pour $x=+\infty$.

Soit $a$ un nombre positif, aussi petit qu'on veut. Je dis que

$$\varphi_1(x)=\sqrt{x}\int_{1+a}^{+\infty}\qquad\text{et}\qquad\varphi_2(x)=\sqrt{x}\int_{0}^{1-a}$$

tendent vers zéro quand $x$ croît indéfiniment.

Pour $\varphi_1$, la quantité sous le signe $\int$ est inférieure à $e^{x(1-t+\log t)}$. Je dis que l'on peut trouver un nombre positif $k$ tel que l'on ait, pour $t\geqq 1+a$,

$$(1-k)(1-t)+\log t<0. \tag{32}$$

En effet, la dérivée du premier membre par rapport à $t$ est

$$k-1+\frac{1}{t}\leqq k-1+\frac{1}{a+1}.$$

Elle est négative, si nous supposons $k<\frac{a}{a+1}\cdot$ Donc, le maximum de la fonction est obtenu pour $t=1+a$, soit

$$(33) \qquad -(1-k)a + \log(1+a).$$

Or, pour $k=0$, ceci se réduit à $-a+\log(1+a)$, quantité négative. Donc, on peut choisir $k$ assez petit pour que l'expression (33) soit aussi négative, ce qui entraînera l'inégalité (32).

Nous avons alors

$$1-t+\log t < k(1-t);$$

d'où

$$\varphi_1(x) < \sqrt{x}\int_{1+a}^{+\infty} e^{-xk(t-1)}\,dt = \frac{1}{k\sqrt{x}}\,e^{-akx}.$$

Le dernier membre tend vers zéro pour $x=+\infty$; donc, il en est de même de $\varphi_1(x)$.

Pour $\varphi_2$, déterminons $k$ positif et plus petit que $a$ tel que l'on ait, pour $0<t<1-a$,

$$(34) \qquad 1-t+(1-k)\log t < 0.$$

La dérivée de cette expression par rapport à $t$ est

$$-1+\frac{1-k}{t} > -1+\frac{1-k}{1-a} = \frac{a-k}{1-a} > 0.$$

Donc, le maximum est obtenu pour $t=1-a$, soit

$$(35) \qquad a+(1-k)\log(1-a).$$

Or, pour $k=0$, cette dernière quantité se réduit à $a+\log(1-a)$, ce qui est négatif. On peut donc choisir $k$ assez petit pour que (35) ait aussi ce signe et cela entraîne (34).

Nous avons alors

$$\varphi_2(x) < \sqrt{x}\int_0^{1-a} e^{(kx-1)\log t}\,dt$$
$$= \sqrt{x}\int_0^{1-a} t^{kx-1}\,dt = \frac{(1-a)^{kx}}{k\sqrt{x}}.$$

Le dernier membre tend vers zéro pour $x = +\infty$ ; il en est donc de même de $\varphi_2(x)$.

Finalement, nous sommes ramenés à chercher la limite de

$$\varphi_3(x) = \sqrt{x}\int_{1-a}^{1+a} e^{x(1-t)+(x-1)\log t}\,dt$$
$$= \sqrt{x}\int_{-a}^{+a} e^{-xt+(x-1)\log(1+t)}\,dt,$$

le nombre positif $a$ pouvant être supposé aussi petit qu'on veut.

Si $-a < t < a$, on a

$$t - \frac{t^2}{2}(1+\alpha) < \log(1+t) < t - \frac{t^2}{2}(1-\alpha),$$

$\alpha$ étant un nombre constant, qui tend vers zéro en même temps que $a$.

On en déduit, en supposant $x > 1$,

$$\sqrt{x}\,e^{-a}\int_{-a}^{+a} e^{-(x-1)(1+\alpha)\frac{t^2}{2}}\,dt < \varphi_3(x)$$
$$< \sqrt{x}\,e^{a}\int_{-a}^{+a} e^{-(x-1)(1-\alpha)\frac{t^2}{2}}\,dt.$$

Pour trouver la limite de la première intégrale, faisons le changement de variable

$$(x-1)(1+\alpha)\frac{t^2}{2} = u.$$

L'intégrale devient

$$\sqrt{\frac{2x}{(x-1)(1+\alpha)}}\,e^{-a}\int_0^{(x-1)(1+\alpha)\frac{a^2}{2}} e^{-u}\,u^{-\frac{1}{2}}\,du.$$

Quand $x$ croît indéfiniment, sa limite est

$$\sqrt{\frac{2}{1+\alpha}}\,e^{-a}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{2\pi}\,e^{-a}}{\sqrt{1+\alpha}}.$$

On verrait de même que la deuxième intégrale a pour limite $\frac{\sqrt{2\pi}\,e^a}{\sqrt{1-\alpha}}$.

La limite de $\varphi_3(x)$ est comprise entre ces deux limites. Comme on peut supposer $a$ arbitrairement petit, elle est égale à $\sqrt{2\pi}$.

Finalement, $\varphi(x)$ a pour limite $\sqrt{2\pi}$; donc, $\Phi(x)$ a pour limite $\log\sqrt{2\pi}$.

8. Nous venons de retrouver les propriétés les plus connues de la fonction $\Gamma$. En voici d'autres, qui le sont moins.

Changeons $x$ en $x+1$ dans (2) :

$$\frac{d\log\Gamma(x+1)}{dx} = -C + \int_0^1 \frac{1-t^x}{1-t}\,dt.$$

On a, quel que soit $x$,

$$\frac{1-t^x}{1-t} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\,\frac{(\log t)^n}{1-t}. \tag{36}$$

La série du second membre est uniformément convergente dans l'intervalle $(\varepsilon, 1)$, si petit que soit $\varepsilon$. En effet, la fonction $\frac{(\log t)^n}{1-t}$ est finie et continue pour toutes les valeurs de cet intervalle; son module admet donc une borne supérieure M et la série (36) est majorée par la série convergente de terme général $M\frac{|x|^n}{n!}$. D'autre part, si $-1 < x < 0$, elle est à termes positifs. En outre, l'intégrale $\int_0^1 \frac{1-t^x}{1-t}\,dt$ est finie, ainsi que chacune des intégrales $\int_0^1 \frac{x^n}{n!}\,\frac{(\log t)^n}{1-t}\,dt$. On en conclut qu'on peut intégrer terme à terme ([1]).

---

([1]) *Cf.* J. HAAG, *Sur l'intégration des séries* (*Bulletin des Sciences mathématiques*, avril 1924).

Si $x$ est positif, la série est alternée. Mais, la série des valeurs absolues s'obtient en changeant $x$ en $-x$. Elle a pour somme $\frac{1-t^{-x}}{1-t}$, dont l'intégrale est finie si $x < 1$. Nous avons donc encore le droit d'intégrer terme à terme dans cette hypothèse.

En définitive, si l'on pose

$$(37) \qquad \begin{aligned} S_n &= \frac{1}{(n-1)!}\int_0^1 \frac{(-\log t)^{n-1}}{1-t}\,dt \\ &= \frac{1}{(n-1)!}\int_0^{+\infty} \frac{z^{n-1}}{e^z - 1}\,dz, \end{aligned}$$

on a

$$(38) \qquad \frac{d\log\Gamma(x+1)}{dx} = -C + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} S_{n+1} x^n.$$

Cette formule, *valable pour* $-1 < x < 1$, ne l'est certainement pas pour $x \geqq 1$. En effet, on a, d'après (37),

$$(39) \qquad S_{n+1} > \frac{\Gamma(n+1)}{n!} = 1.$$

Donc, le terme général de la série (38) est supérieur, en valeur absolue, à $x^n$ et ne saurait tendre vers zéro pour $x \geqq 1$.

On peut aussi remarquer que, d'après (7), le premier membre de (38) admet le pôle $x = -1$ comme pôle le plus rapproché de l'origine. Donc son développement en série entière a un rayon de convergence égal à 1.

En comparant (38) avec la formule de Mac-Laurin, on voit que la dérivée $n^{\text{ième}}$ de $\log\Gamma(x)$ est égale, pour $x = 1$, à $(-1)^n S_n (n-1)!$.

On peut obtenir aussi cette dérivée au moyen de la formule (7), qui donne ([1]), pour $n \geqq 2$,

$$\frac{d^n \log \Gamma(x)}{dx^n} = (-1)^n (n-1)! \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+x)^n}. \tag{40}$$

On en conclut que

$$S_n = 1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \ldots + \frac{1}{k^n} + \ldots. \tag{41}$$

La formule (37) nous donne la somme de cette série sous forme d'intégrale définie. En la rapprochant de la formule (25), on obtient

$$B_n = \frac{4n}{(2\pi)^{2n}} \int_0^{+\infty} \frac{z^{2n-1}}{e^z - 1}\, dz.$$

Comme l'intégrale du second membre est supérieure à $\Gamma(2n) = (2n-1)!$, on en déduit l'inégalité

$$B_n > \frac{2(2n)!}{(2\pi)^{2n}}. \tag{42}$$

L'intégrale (37) peut se transformer de diverses manières. C'est ainsi qu'une intégration par parties conduit à

$$S_n = \frac{2^{n-1}}{n!} \int_0^{+\infty} \frac{z^n\, dz}{\operatorname{sh}^2 z} = \frac{2^{2n-2}}{n!\,(2^{n-1}-1)} \int_0^{+\infty} \frac{z^n\, dz}{\operatorname{ch}^2 z}.$$

On a encore

$$S_n = \frac{2^{n-1}}{(n-1)!\,(2^n-1)} \int^{+\infty} \frac{z^{n-1}\, dz}{\operatorname{sh} z}.$$

Dans le cas où $n$ est pair, on peut intégrer entre $-\infty$

---

([1]) On a le droit de dériver indéfiniment la formule (7), car la série (40) est majorée, pour $x > a > 0$, par la série convergente de terme général $\frac{1}{(k+a)^n}$.

et $+\infty$ et appliquer la méthode des résidus, comme nous l'avons fait au nº 3. On aboutit ainsi à des formules de récurrence entre les nombres de Bernoulli. Mais, nous ne reproduisons pas ces calculs, qui n'ont d'intérêt que comme exercices.

9. Prenons les termes de degré impair du développement (38). Ils s'écrivent

$$\sum_{n=1}^{\infty} S_{2n} x^{2n-1} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{(2\pi)^{2n}}{(2n)!} x^{2n-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} - \pi \cot \pi x\right),$$

en appliquant une formule connue, qui peut d'ailleurs être obtenue en remplaçant $x$ par $2i\pi x$ dans la formule (21).

On a donc

$$(43) \qquad \frac{d \log \Gamma(x+1)}{dx} = -C + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} - \pi \cot \pi x\right) - \sum_{n=1}^{\infty} S_{2n+1} x^{2n}.$$

En intégrant et se rappelant que $\Gamma(1) = 1$, il vient

$$\log \Gamma(x+1) = \frac{1}{2} \log \frac{\pi x}{\sin \pi x} - Cx - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{S_{2n+1}}{2n+1} x^{2n+1}.$$

En changeant $x$ en $-x$ et ajoutant les deux développements, il vient

$$\log[\Gamma(1+x)\Gamma(1-x)] = \log \frac{\pi x}{\sin \pi x};$$

d'où

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}.$$

On retrouve la formule (11).

Si nous supposons $0 < x < 1$, nous avons le droit de changer $x$ en $x-1$ dans (43). En retranchant membre à membre et se souvenant que $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, on obtient l'identité

$$\frac{1}{2x} - \frac{1}{2(1-x)} = \sum_{n=1}^{\infty} S_{2n+1}[(1-x)^{2n} - x^{2n}].$$

Autrement dit, si $x$ et $y$ sont deux nombres positifs de somme 1, on a

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} S_{2n+1}(y^{2n} - x^{2n}).$$

Posons

$$x = \frac{1-z}{2}, \qquad y = \frac{1+z}{2};$$

il vient

$$(44) \qquad \frac{z}{1-z^2} = \sum_{n=1}^{\infty} A_{2n+1}[(1+z)^{2n} - (1-z)^{2n}],$$

en appelant $A_p$ la série formée par la somme des inverses des puissances $p^{\text{iemes}}$ des nombres pairs consécutifs.

Cette formule est valable pour $-1 < z < 1$. A l'intérieur de cet intervalle, le premier membre peut être développé en série entière. Il en est donc de même du second. En égalant de part et d'autre les coefficients de $z^{2p-1}$, nous obtenons l'identité (¹)

$$(45) \qquad \frac{1}{2} = \sum_{n=p}^{\infty} C_{2n}^{2p-1} A_{2n+1}.$$

---

(¹) On peut la démontrer directement de la manière suivante. Considérons la série double de terme général

$$u_{nk} = C_{2n}^{2p-1}\left(\frac{1}{2k}\right)^{2n+1}$$

$$(k = 1, 2, 3, \ldots;\ n = p,\ p+1,\ p+2,\ \ldots).$$

Si on la somme d'abord par rapport à $k$, puis par rapport à $n$, on

La formule (44) est évidemment valable pour toutes les valeurs imaginaires de $z$ dont le module est plus petit que 1. Posons, par exemple, $z = i \tang \varphi$. Nous obtenons l'identité

$$\frac{1}{4}\sin 2\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} A_{2n+1} \frac{\sin 2n\varphi}{(\cos\varphi)^{2n}},$$

qui est valable pour $-\frac{\pi}{4} < \varphi < \frac{\pi}{4}$.

---

obtient évidemment la série (45). Tout revient donc à prouver que cette série double est convergente et a pour somme $\frac{1}{2}$.

Sommons par rapport à $n$; nous obtenons

$$v_k = \left(\frac{1}{2k}\right)^{2p} \sum_{n=p}^{\infty} C_{2n}^{2p-1} \left(\frac{1}{2k}\right)^{2n-2p+1} = \frac{w_k}{(2k)^{2p}}.$$

Or, $w_k$ est le coefficient de $x^{2p-1}$ dans le développement de la fonction

$$\sum_{n=p}^{\infty} (x+y)^{2n} = \frac{(x+y)^{2p}}{1-(x+y)^2},$$

où l'on a posé, pour simplifier l'écriture, $y = \frac{1}{2k}$ et où l'on suppose la variable $x$ positive et inférieure à $1-y$. Cette fonction, décomposée en éléments simples, devient

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-y-x} + \frac{1}{1+y+x}\right) + \mathrm{E},$$

la partie entière E étant de degré $2p-2$ et ne fournissant, par conséquent, aucun terme en $x^{2p-1}$. On a, dès lors,

$$\begin{aligned} w_k &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{(1-y)^{2p}} - \frac{1}{(1+y)^{2p}}\right] \\ &= \frac{1}{2}(2k)^{2p}\left[\frac{1}{(2k-1)^{2p}} - \frac{1}{(2k+1)^{2p}}\right]; \\ v_k &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{(2k-1)^{2p}} - \frac{1}{(2k+1)^{2p}}\right]. \end{aligned}$$

Il est maintenant évident que

$$\sum_{k=1}^{\infty} v_k = \frac{1}{2}.$$

10. Pour terminer, nous donnerons une dernière application de la formule (2). Si $x = n + 1$, $n$ étant un entier positif, elle devient

$$\frac{\Gamma'(n+1)}{n!} = -C + \int_0^1 (1 + t + t^2 + \ldots + t^{n-1})\, dt$$
$$= -C + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}\right).$$

D'autre part, la formule (5) donne, en changeant $x$ en $n + 1$,

$$\Gamma'(n+1) = \int_0^\infty e^{-t} t^n \log t\, dt.$$

On a donc la formule

$$C = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}\right) - \int_0^\infty e^{-t} \frac{t^n}{n!} \log t\, dt.$$

On en conclut que la différence

$$\int_0^\infty e^{-t} \frac{t^n}{n!} \log t\, dt - \log n$$

tend vers zéro quand $n$ croît indéfiniment.