Certificats de mathématiques générales

Nouvelles annales de mathématiques 5e série, tome 3 (1924), p. 117-120

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1924_5_3__117_1>

CERTIFICATS DE MATHÉMATIQUES GÉNÉRALES.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — 1° *Intégrer le système d'équations différentielles :*

$$\frac{dy}{dt} - 4x + 4a\cos 2t = 0,$$

$$\frac{dx}{dt} + 4y - 4a\sin 2t = 0.$$

2° *Trouver le système de solution tel que*

$$x = a, \qquad y = 0 \qquad (\text{pour } t = 0).$$

3° *Cette solution représente les équations paramétriques d'une courbe; former l'équation de sa tangente.*

4° *Conditions pour que deux tangentes soient perpendiculaires. Montrer qu'il y a trois tangentes perpendiculaires à une tangente donnée.*

5° *Lieu des points d'intersection de deux tangentes perpendiculaires. Montrer qu'il est formé de deux courbes distinctes.*

Indications sur la solution :

1° $$\frac{d^2 x}{dt^2} + 16x = 24a\cos 2t.$$

$$x = C\cos 4t + C'\sin 4t + 2a\cos 2t,$$

$$y = a\sin 2t - \frac{1}{4}\frac{dx}{dt} = C\sin 4t - C'\cos 4t + 2a\sin 2t.$$

2° $$C = -a, \qquad C' = 0.$$

$$x = a(2\cos 2t - \cos 4t) = a + 2a(1 - \cos 2t)\cos 2t,$$

$$y = a(2\sin 2t - \sin 4t) = 2a(1 - \cos 2t)\sin 2t.$$

Si l'on transporte l'origine au point $(a, 0)$, on a, en coordonnées polaires :

$$\theta = 2t, \qquad \rho = 2a(1 - \cos\theta);$$

cardioïde, conchoïde du cercle

$$\rho = -2a\cos\theta.$$

3° $$x' = 4a(\sin 4t - \sin 2t) = 8a\sin t\cos 3t,$$

$$y' = 4a(\cos 2t - \cos 4t) = 8a\sin t\sin 3t;$$

tangente :

$$X\sin 3t - Y\cos 3t = x\sin 3t - y\cos 3t = 3a\sin t.$$

4° Deux tangentes sont perpendiculaires si

$$\operatorname{tang} 3t \operatorname{tang} 3t' = -1, \qquad \cos 3(t' - t) = 0,$$

$$t' - t = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}.$$

Mais t et $t + \pi$ donnent le même point (x, y). Trois solutions distinctes :

$$t' = t \pm \frac{\pi}{6}, \qquad t' = t + \frac{\pi}{2}.$$

5° Intersection de deux tangentes :

$$x \sin 3(t' - t) = 3a \sin(t' - t)\,[1 + 4 \sin t \sin t' \cos(t' + t)],$$
$$y \sin 3(t' - t) = 12a \sin(t' - t) \sin t \sin t' \sin(t' + t).$$

Si $t' = t + \frac{\pi}{2}$,

$$x = -3a + 6a \sin^2 2t = -3a \cos 4t,$$
$$y = 6a \sin 2t \cos 2t = 3a \sin 4t$$

(cercle).

Si $t' = t \pm \frac{\pi}{6}$, soit $t' + t = \theta$,

$$x = \frac{3}{2} a \left(1 + \sqrt{3} \cos\theta - 2 \cos^2\theta\right),$$
$$y = \frac{3}{2} a \left(\sqrt{3} - 2 \cos\theta\right) \sin\theta.$$

Si l'on transporte l'origine au point $\left(\frac{3}{2}a, 0\right)$, on a, en coordonnées polaires,

$$\rho = \frac{3}{2} a \left[\sqrt{3} - 2 \cos\theta\right].$$

Limaçon de Pascal, conchoïde du cercle

$$\rho = -3a \cos\theta.$$

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Intégrer l'équation différentielle*

$$y' \cos x + 3y \sin x = 4 \sin x + 2 \sin^3 x.$$

1° *Montrer que toutes les courbes intégrales passent par des points fixes, et ont, en ces points, leur centre de courbure fixe*

2° *Trouver l'intégrale particulière qui prend la valeur* $y = 1$, *pour* $x = \pi$. *Construire la courbe représentative.*

3° *Calculer l'abscisse positive du premier point de rencontre de cette courbe avec* Ox.

INDICATIONS SUR LA SOLUTION :

$$y = 2\sin^2 x + C\cos^3 x.$$

1° Cette courbe passe par les points (indépendants de C) :

$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \qquad y = 2, \qquad y' = 0, \qquad y'' = -4;$$

centre de courbure :

$$X = x - y'\,\frac{1+y'^2}{y''} = x = \frac{\pi}{2} + k\pi,$$

$$Y = y + \frac{1+y'^2}{y''} = \frac{7}{4}.$$

2° $$C = -1, \qquad y = 2 - 2\cos^2 x - \cos^3 x,$$

$$y' = \sin x \cos x(4 + 3\cos x).$$

Les droites $x = k\pi$ sont des axes de symétrie. Aux points $(0, -1)$, $\left(\frac{\pi}{2}, 2\right)$, $(\pi, 1)$, la tangente est parallèle à Ox.

3° $$\cos x = X; \qquad f(X) = X^3 + 2X^2 - 2 = 0.$$

X a une seule valeur réelle, positive, entre 0 et 1 :

$$f'(X) = 3X^2 + 4X, \qquad f''(X) = 6X + 4.$$

La méthode de Newton donne :

$$f(1) = 1, \qquad f'(1) = 7, \qquad f''(1) = 10;$$

$$-h = \frac{f}{f'} = \frac{1}{7} = 0,142, \qquad \frac{h^2}{2}\frac{f''}{f'} = 0,014;$$

$$X = 1 - 0,14 = 0,86 \qquad \text{(approximation 0,01)};$$

$$f(0,85) = 0,059125, \qquad f'(0,85) = 5,5675,$$

$$f''(0,85) = 9,1;$$

$$-h = \frac{f}{f'} = 0,01062, \qquad \frac{h^2}{2}\frac{f''}{f'} = 0,000092;$$

$$X = \cos x = 0,85 - 0,0107 = 0,8393;$$

$$x = 32°56' = 0,575.$$

(Marseille, juin 1924.)