Nouvelles annales de mathématiques

Fernand Josse

Sur les mouvements relatifs de trois plans qui glissent l'un sur l'autre

Nouvelles annales de mathématiques 5e série, tome 2 (1923), p. 92-97

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1923_5_2__92_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1923, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques

http://www.numdam.org/

[R1b]

SUR LES MOUVEMENTS RELATIFS DE TROIS PLANS QUI GLISSENT L'UN SUR L'AUTRE;

PAR FERNAND JOSSE,
Élève à l'École Centrale des Arts et Manufactures.

1. Soient P_0, P_1, P_2, ... des plans qui glissent sur un même plan fixe (lequel peut se confondre avec l'un d'eux). Le mouvement de P_i par rapport à P_j sera désigné par le symbole $\left(\frac{P_i}{P_j}\right)$. A un instant donné, ce mouvement est tangent à une rotation de centre I_{ij} (centre instantané de rotation) et de vitesse angulaire ω_{ij}. I_{ij} est confondu avec I_{ji} et l'on a

$$\omega_{ij} = -\omega_{ji}.$$

Si l'on considère trois quelconques de ces plans P_i, P_j, P_k, la théorie des mouvements relatifs conduit immédiatement aux résultats suivants :

1° Les centres I_{jk}, I_{ki}, I_{ij} sont en ligne droite ;
2° On a

$$\frac{\omega_{jk}}{I_{ij}I_{ik}} = \frac{\omega_{ki}}{I_{jk}I_{ji}} = \frac{\omega_{ij}}{I_{ki}I_{kj}},$$

où il faut tenir compte des conventions de signes ordinaires, pour les numérateurs et pour les dénominateurs. Ces égalités ont comme conséquence

$$\omega_{jk} + \omega_{ki} + \omega_{ij} = 0,$$

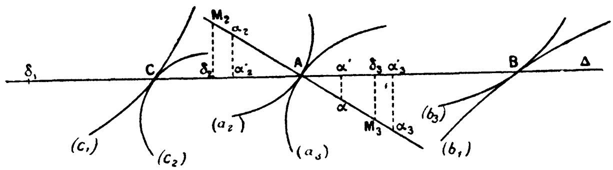
formule évidente *a priori*.

2. Prenons les plans P_1, P_2, P_3. Le mouvement $\left(\frac{P_3}{P_2}\right)$ peut être obtenu par le roulement d'une courbe (a_3) sur courbe (a_2) ; le mouvement $\left(\frac{P_1}{P_3}\right)$ par le roulement d'une courbe (b_1) sur une courbe (b_3) ; le mouvement $\left(\frac{P_2}{P_1}\right)$ par le roulement d'une courbe (c_2) sur une courbe (c_1). Les courbes (b_1) et (c_1) sont liées à P_1, (c_2) et (a_2) à P_2, (a_3) et (b_3) à P_3.

Pour éviter un excès d'indices, appelons A le centre I_{23}, B le centre I_{31} et C le centre I_{12}. Alors, A, étant le centre instantané de rotation pour le mouvement $\left(\frac{P_3}{P_2}\right)$, est le point de contact de (a_2) et (a_3). De même B est le point de contact de (b_3) et (b_1), C le point de contact de (c_1) et (c_2).

Aux points A, B, C les courbes (a), (b) et (c) ont en tout six centres de courbure. *L'objet de cette Note est d'établir qu'il existe entre ces six centres de courbure une relation et d'en rechercher la forme.*

3. Désignons par Δ (*fig.* 1) la droite ABC. Cette droite enveloppe, respectivement par rapport aux trois



plans P_1, P_2, P_3, trois courbes Γ_1, Γ_2, Γ_3. Soient δ_1, δ_2, δ_3 les points caractéristiques de Δ. On peut supposer que Δ *roule* sur Γ_1, en donnant à cette droite un glissement convenable le long d'elle-même. Soit alors P_0 un plan lié à Δ. Le centre I_{01} est le point δ_1. Le centre I_{02} doit être aligné sur le précédent et sur le centre I_{12}, c'est-à-dire sur C. D'autre part le même centre est sur la normale à Δ en δ_2 qui est son point caractéristique dans $\left(\frac{P_2}{P_0}\right)$.

C'est donc le point δ_2 même [1].

Exprimons que les courbes (a_3) et (a_2) roulent l'une sur l'autre : il suffit d'écrire que le point A, entraîné dans l'un ou l'autre des mouvements $\left(\frac{P_2}{P_0}\right)$ et $\left(\frac{P_3}{P_0}\right)$, a la même vitesse, ce qui donne

$$\omega_{20}\,\delta_2 A = \omega_{30}\,\delta_3 A.$$

Posons encore, pour simplifier les notations,

$$\omega_{10} = \omega_1, \qquad \omega_{20} = \omega_2, \qquad \omega_{30} = \omega_3;$$

la relation précédente et les relations analogues

---

[1] On voit donc accessoirement que, dans le mouvement $\left(\frac{P_2}{P_0}\right)$, la *base* est le lieu de δ_2 dans P_0, c'est-à-dire Δ, et la *roulante* le lieu de δ_2 dans P_2, c'est-à-dire Γ_2. Donc *l'hypothèse que* Δ *roule sur* Γ_1 *entraîne la conséquence que* Δ *roule sur* Γ_2 *et, bien entendu, sur* Γ_3 *aussi.*

s'écrivent

$$(1)\quad \begin{cases} \omega_2\delta_2 A = \omega_3\delta_3 A, \\ \omega_3\delta_3 B = \omega_1\delta_1 B, \\ \omega_1\delta_1 C = \omega_2\delta_2 C. \end{cases}$$

Introduisons maintenant les centres de courbure α_2 de (a_2) et α_3 de (a_3) en A, et reproduisons le raisonnement de M. J. Pérès dans un article récent [1].

Supposons que le mouvement de Δ soit maintenant tel que le point A soit fixe sur cette droite, et soit P_4 un plan entraîné dans ce mouvement. Les centres I_{24} et I_{34} sont les points M_2 et M_3 de $\alpha_2\alpha_3$, qui se projettent sur Δ en δ_2 et δ_3. Soit V la vitesse du point A, entraîné dans l'un ou l'autre des mouvements $\left(\frac{P_2}{P_4}\right)$, $\left(\frac{P_3}{P_4}\right)$. On a

$$V = M_2A\,\omega_{24} = M_3A\,\omega_{34},$$

d'où

$$\omega_{32} = \omega_{34} - \omega_{24} = V\left(\frac{1}{M_2A} - \frac{1}{M_3A}\right).$$

Si l'on refaisait le raisonnement, en remplaçant Δ par $\alpha_2\alpha_3$, on aurait

$$\omega_{32} = V\left(\frac{1}{\alpha_2A} - \frac{1}{\alpha_3A}\right).$$

On tire de là

$$\frac{1}{M_2A} - \frac{1}{M_3A} = \frac{1}{\alpha_2A} - \frac{1}{\alpha_3A},$$

ou encore

$$\frac{1}{AM_3} - \frac{1}{AM_2} = \frac{1}{A\alpha_3} - \frac{1}{A\alpha_2}.$$

Soient α'_2, α'_3 les projections sur Δ de α_2, α_3, on obtient,

---

[1] *A propos de la formule d'Euler-Savary* (*N. A.*, 1923, p. 205).

par projection de l'égalité précédente,

$$\frac{1}{A\delta_3} - \frac{1}{A\delta_2} = \frac{1}{l},$$

en posant

$$\frac{1}{A\alpha'} = \frac{1}{A\alpha'_3} - \frac{1}{A\alpha'_2} \qquad \text{et} \qquad A\alpha' = l.$$

On reconnaît, en invoquant des résultats classiques, que *le point α' n'est autre que la projection sur Δ du point α diamétralement opposé à A sur le cercle des inflexions du mouvement* $\left(\frac{P_3}{P_2}\right)$.

Récrivons l'égalité précédemment obtenue, ainsi que les égalités analogues :

$$(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\frac{1}{A\delta_3} - \frac{1}{A\delta_2} = \frac{1}{l}, \\ &\frac{1}{B\delta_1} - \frac{1}{B\delta_3} = \frac{1}{m}, \\ &\frac{1}{C\delta_2} - \frac{1}{C\delta_1} = \frac{1}{n}. \end{aligned} \right.$$

3. On tire des égalités (1)

$$(3) \qquad A\delta_2 . B\delta_3 . C\delta_1 = A\delta_3 . B\delta_1 . C\delta_2.$$

Les trois points δ_1, δ_2, δ_3 interviennent dans les quatre relations (2) et (3). En éliminant ces trois points il doit rester, comme je l'ai dit au n° 2, une relation entre les six centres de courbure α_2, α_3, ..., etc.

Pour faire cette élimination, remarquons qu'on satisfait à (3) de la manière la plus générale en posant

$$\frac{B\delta_1}{C\delta_1} = \frac{\mu}{\nu}, \qquad \frac{C\delta_2}{A\delta_2} = \frac{\nu}{\lambda}, \qquad \frac{A\delta_3}{B\delta_3} = \frac{\lambda}{\mu},$$

λ, μ, ν étant quelconques. La première de ces relations donne

$$\frac{B\delta_1}{\mu} = \frac{C\delta_1}{\nu} = \frac{B\delta_1 - C\delta_1}{\mu - \nu} = \frac{BC}{\mu - \nu},$$

d'où

$$B\,\delta_1 = BC\,\frac{\mu}{\mu-\nu}, \qquad C\,\delta_1 = BC\,\frac{\nu}{\mu-\nu},$$

et, de même,

$$C\,\delta_2 = CA\,\frac{\nu}{\nu-\lambda}, \qquad A\,\delta_2 = CA\,\frac{\lambda}{\nu-\lambda},$$

$$A\,\delta_3 = AB\,\frac{\lambda}{\lambda-\mu}, \qquad B\,\delta_3 = AB\,\frac{\mu}{\lambda-\mu}.$$

La première des relations (2) donne, d'autre part,

$$l = \frac{A\,\delta_2 . A\,\delta_3}{A\,\delta_2 - A\,\delta_3}.$$

En remplaçant $A\delta_2$ et $A\delta_3$ par leurs valeurs, on trouve, après réduction,

$$l = AB.CA\,\frac{\lambda}{(\lambda-\mu)CA-(\nu-\lambda)AB} = \frac{\lambda\,AB.CA}{\lambda CB+\mu\,AC+\nu BA}.$$

On a de même

$$m = \frac{\mu BC.AB}{\lambda CB+\mu AC+\nu BA},$$

$$n = \frac{\nu CA.BC}{\lambda CB+\mu AC+\nu BA}.$$

Multiplions ces relations respectivement par $\overline{BC}^2$, $\overline{CA}^2$, $\overline{AB}^2$ et ajoutons. On reconnaît que λ, μ, ν s'éliminent et il reste

$$l\,\overline{BC}^2 + m\,\overline{CA}^2 + n\,\overline{AB}^2 + BC.CA.AB = 0,$$

ou, en remplaçant l, m, n par leurs valeurs,

$$(3)\qquad \overline{A\alpha'}.\overline{BC}^2 + \overline{B\beta'}.\overline{CA}^2 + \overline{C\gamma'}.\overline{AB}^2 + BC.CA.AB = 0.$$

C'est la relation demandée. Il serait intéressant d'en obtenir une interprétation géométrique simple, permettant, en particulier, de construire un des six centres de courbure, connaissant les cinq autres.