NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

A. BUHL

Sur la géométrie de la formule de Stokes

Nouvelles annales de mathématiques 5e série, tome 2 (1923), p. 7-17

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1923_5_2__7_1>

[O'5a]

SUR LA GÉOMÉTRIE DE LA FORMULE DE STOKES;

PAR A. BUHL.

1. On trouvera, dans ce qui suit, quelques développements qui pourraient s'ajouter au Chapitre II de mon opuscule intitulé *Géométrie et Analyse des intégrales doubles* [1]. Je ferai quelques renvois à cette

[1] *Collection Scientia*, n° 36 (Gauthier-Villars et C^ie, éditeurs)

publication (indiquée simplement par les initiales I. D.), mais cela n'empêchera pas les lignes qui suivent de se suffire aisément à elles-mêmes.

Il s'agit d'intégrales doubles du type stokien, c'est-à-dire de la forme

$$\int\int_S (\alpha F + \beta G + \gamma H)\, d\sigma,$$

la condition

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z} = 0$$

étant réalisée. Ces intégrales ne dépendent que du contour C de la cloison S et, qu'on les réduise explicitement ou non à des intégrales de ligne étendues à C, elles ont des propriétés géométriques spéciales et particulièrement intéressantes.

Je reviens surtout sur des volumes tournants dont les propriétés se rattachent aux résultats généraux de M. G. Kœnigs (*Journal de Mathématiques*, 1889), mais qu'on peut cependant voir sous des aspects élémentaires et directs bien dignes d'être signalés.

Je termine avec des sommes abéliennes de volumes coniques. En toutes ces questions, on rencontre beaucoup d'équations linéaires aux dérivées partielles dont la complication varie avec des modifications d'énoncés toujours faciles à apercevoir. On a ainsi le moyen de constituer une mine de problèmes sur lesquels les candidats à l'Agrégation pourront méditer utilement.

2. *Volumes tournants* V *et surfaces de révolution.* — On sait, et il est d'ailleurs bien facile d'établir, que si une portion de surface, ou cloison S, tourne, dans l'espace, autour d'un axe AB passant par $A(a, b, c)$ et de cosinus directeurs λ, μ, ν, le volume coronal engendré est (I. D., p. 25)

$$(1) \qquad V = 2\pi \int\int_S \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \lambda & \mu & \nu \\ x-a & y-b & z-c \end{vmatrix} d\sigma.$$

Pour éviter toute difficulté, nous supposerons que AB est complètement extérieur à S. Comme d'habitude α, β, γ sont les cosinus directeurs de la normale à S en l'élément $d\sigma$.

Si cette cloison S, ou simplement son contour C, faisaient partie d'une surface de révolution d'axe AB, il est clair que V serait nul, remarque qui conduit immédiatement à cet énoncé : *Si l'on égale à zéro le déterminant de l'intégrale double exprimant* V, *on obtient l'équation aux dérivées partielles des surfaces de révolution autour de* AB. Cette équation aux dérivées partielles a déjà été donnée sous une telle forme, par exemple par H. Laurent dans son *Traité d'Analyse* (t. VI, p. 16)), mais il y a, en la formule (1), une interprétation, de son premier membre, à laquelle on pense sans doute beaucoup moins.

3. *Volumes dus à des cloisons sphériques.* — La formule (1) redonne aisément le théorème de Guldin ordinaire et aussi le théorème de M. G. Kœnigs sur le volume tournant engendré par un contour plan animé d'une rotation autour d'un axe *quelconque* (I. D., p. 27).

Mais si simples que soient ces applications, ce ne sont cependant pas *les plus simples*, contrairement à ce que l'on pourrait naturellement croire. Il y a une simplicité spéciale, indépendante notamment de toute considération de centre de gravité, en les volumes tournants dus à des cloisons sphériques.

Soit l'élément $d\sigma$ sur une sphère de centre O et de rayon R. Le plan Oxy sera OAB et Oy sera pris parallèle à AB. Alors

$$\alpha = \frac{x}{R}, \qquad \beta = \frac{y}{R}, \qquad \gamma = \frac{z}{R},$$

et, AB passant par $A(a, 0, 0)$, il vient

$$V = 2\pi a \int\int_S \frac{z}{R}\, d\sigma.$$

L'intégrale double figurant dans cette égalité représente la projection sur OAB de l'aire sphérique S.

Le volume tournant dû à une cloison S *sphérique, de centre* O, *pour un axe de rotation* AB *quelconque, est égal au produit de la circonférence décrite par* O *par l'aire de la projection* S′ *de* S *sur le plan* OAB.

Ce résultat a déjà été démontré, par une méthode différente, dans les *Comptes rendus des séances de la Société mathématique* (23 février 1921).

On peut évidemment tirer du théorème plusieurs corollaires sur des V équivalents du fait qu'on aura déplacé ou déformé S sans modifier sa projection S′.

4. *Volumes* V *généraux pour* AB *axe* Oz. — Nous prenons maintenant une cloison tout à fait quelconque, appartenant à une surface $z = f(x, y)$. On a

$$\alpha\, d\sigma = -p\, dx\, dy, \qquad \beta\, d\sigma = -q\, dx\, dy, \qquad \gamma\, d\sigma = dx\, dy$$

et (1) donne

$$V = 2\pi \int\int_S (py - qx)\, dx\, dy. \tag{2}$$

Remarquons que $py - qx = 0$ est l'équation aux dérivées partielles des surfaces de révolution d'axe Oz.

Partant de (2), on peut se proposer diverses questions intéressantes. On peut chercher les surfaces S pour lesquelles l'intégrale double a une forme déterminée, ou une forme qui exprime V par quelque autre quantité géométrique. Ainsi soit

$$(3)\qquad py - qx = -\frac{a}{\Phi'(z)},$$

le second membre de cette égalité étant une fonction de z seul ayant la forme indiquée pour faciliter des calculs ultérieurs. Or (3) est une équation aux dérivées partielles dont l'intégrale générale, en coordonnées semi-polaires, est

$$(4)\qquad \Phi(z) = a\theta + F(r).$$

Ces surfaces ont déjà été étudiées ici-même, d'un point de vue très différent (*Sur les surfaces dont les lignes asymptotiques se déterminent par quadratures; N. A.*, 1908, 1909, 1910).

On peut les définir comme surfaces telles que le triangle, formé par l'origine et les intersections avec Oxy de l'ordonnée et de la normale, ait une aire ne dépendant que de z. On voit que, pour une certaine cloison S prise sur l'une quelconque de ses surfaces, on aura aussi la propriété remarquable

$$(5)\qquad V = -2\pi a \int\int_S \frac{dx\,dy}{\Phi'(z)}.$$

Soit $\Phi(z) = z$. *Une cloison* S, *appartenant à l'hélicoïde*

$$z = a\theta + F(r),$$

donne un volume tournant, d'axe Oz, *égal au produit de* $2\pi a$ *par l'aire plane contenue dans la projection de* S *sur* Oxy.

Soit $\Phi(z) = \log z$. *Une cloison* S, *appartenant à* *la surface*

$$\log z = a\theta + F(r),$$

donne un volume tournant, d'axe Oz, *proportionnel au volume cylindrique* U_z *compris entre* S *et sa projection* S′ *sur* Oxy. Le facteur de proportionnalité est, en valeur absolue, $2\pi a$; il doit évidemment être considéré comme purement numérique alors que, dans le théorème précédent, a était une longueur. Remarquons encore que, dans le second théorème, il y a une proportionnalité entre volumes qui est absolument analogue à la proportionnalité entre aires dans le théorème de la projection des aires planes; le facteur $2\pi a$ est arbitraire tout comme le cosinus d'un angle de projection.

5. *Généralisations du théorème de M. G. Kœnigs.* — Revenons maintenant à la formule (2) et supposons que l'on ait

$$py - qx = kx.$$

L'intégrale générale de cette équation est

$$z + ky = f(r); \tag{6}$$

on a donc, pour ces surfaces,

$$V = 2\pi k \int\int_S x\,dx\,dy.$$

Or, le second nombre de cette égalité, abstraction faite du facteur de proportionnalité k, est le volume tournant, d'axe Oy dû à l'aire plane S′ projection de S sur Oxy. Donc :

Le volume tournant, d'axe Oz, *dû à une cloison* S *appartenant à la surface* (6), *est proportionnel au* *volume tournant, d'axe* Oy, *dû à la projection* S', *de* S, *sur le plan* Oxy.

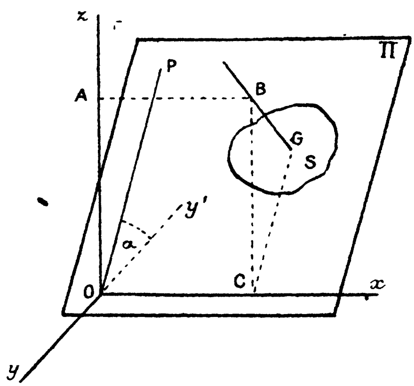
Là encore cette proportionnalité rappelle la projection des aires planes. La surface (6) est le lieu de sections obliques et parallèles de cylindres circulaires d'axe Oz; faire varier le coefficient de proportionnalité k, c'est faire varier l'obliquité des ellipses génératrices.

Remarquons qu'il y a, en (6), des surfaces élémentaires qui font facilement image; par exemple, le cône et le paraboloïde elliptiques

$$(7)\qquad (z+ky)^2=\lambda(x^2+y^2), \qquad z+ky=\mu(x^2+y^2).$$

Mais, plus simplement encore, il y a, en (6), le plan $z+ky=0$ d'où un théorème tout à fait équivalent à celui de M. G. Kœnigs (I. D., p. 27) et qui, d'ailleurs, s'y ramènera sans peine.

Soit une aire plane S *dont le plan* Π *est rencontré*



en O *par un axe quelconque* Oz. *Soient* OP *la projection de* Oz *sur* Π, yOy' *la perpendiculaire à* Oz

dans le plan zOP *et* α *l'angle* POy'. *Le volume tournant* V, *d'axe* Oz, *dû à* S, *est égal au produit de* $\tan\alpha$ *par le volume tournant* V', *d'axe* Oy, *dû à la projection* S' *de* S *sur le plan* yOx.

Jusqu'ici, il n'est point question de centre de gravité; cette notion n'interviendra que pour déduire V' de S' à l'aide du théorème de Guldin ordinaire. On aura ainsi, en observant que le G de S donne, par projection, le G' de S', et avec les notations indiquées sur la figure,

$$V = k.2\pi\,\overline{OC}.S' = 2\pi\tan\alpha.\overline{OC}.S\cos\alpha = 2\pi\sin\alpha.\overline{OC}.S.$$

Voyons maintenant ce que donnerait le théorème de M. Kœnigs. Il repose sur la considération d'une normale GB, menée à S en son G, puis de la plus courte distance AB; le volume V est alors égal au produit de $2\pi\overline{AB}$ par la projection de S sur le plan OAB. Donc

$$V = 2\pi\,\overline{AB}.\,S\sin\alpha.$$

C'est bien le résultat précédent puisque, par construction, OC = AB.

L'analogie avec un théorème de projection est ici particulièrement évidente puisque

$$S' = S\cos\alpha, \qquad V' = V\cot\alpha.$$

Si l'on considère isolément le théorème que l'on vient d'établir, on n'y voit qu'une transformation aisée de celui de M. Kœnigs et l'intérêt est minime; mais cet intérêt est, au contraire, très notable, si l'on réfléchit que le théorème s'étend aux cloisons prises sur les quadriques (7) et plus généralement sur les surfaces (6).

SOMMES ABÉLIENNES DE VOLUMES CONIQUES.

6. Soit la surface algébrique

$$(8)\qquad \varphi_m(X, Y, Z) + \varphi_{m-1}(X, Y, Z) + \ldots + \varphi_0 = 0.$$

Soit aussi, en dehors de cette surface et sans relation avec elle, un contour fermé quelconque C qui permet de définir un cône OC de sommet O. Ce cône détermine, dans la surface algébrique, m cloisons; entre l'une d'elles et le sommet O est un volume conique τ_i bien déterminé et la somme abélienne de ces m volumes est

$$\sum \tau_i = \int\int_S \Lambda(\alpha x + \beta y + \gamma z)\, d\sigma$$

si

$$\Lambda = -\frac{\varphi_{m-1}^3}{3\varphi_m^3} + \frac{\varphi_{m-1}\varphi_{m-2}}{\varphi_m^2} - \frac{\varphi_{m-3}}{\varphi_m}.$$

Ce Λ doit être exprimé avec les variables minuscules x, y, z; la cloison d'intégration S est quelconque sur le contour C qui la limite (I. D., p. 30).

Ceci posé, on peut précisément chercher à déterminer la surface S pour que l'intégrale double précédente ait une forme donnée à l'avance; pour que, par exemple,

$$\sum \tau_i = \int\int_S f(x, y, z)\, dx\, dy.$$

Ceci entraîne l'équation aux dérivées partielles

$$\Lambda(-px - qy + z) = f(x, y, z),$$

qui peut s'écrire, Λ étant homogène d'ordre -3,

$$px + qy = z - \frac{f}{\Lambda} = z - x^3 f(x, y, z)\, \lambda\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right).$$

Les équations des caractéristiques sont

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z - x^3 f(x, y, z)\lambda\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right)},$$

d'où $y = Cx$ et l'équation différentielle

$$\frac{dz}{dx} = \frac{z}{x} - x^2 f(x, Cx, z)\lambda\left(C, \frac{z}{x}\right). \tag{9}$$

C'est ici que les difficultés peuvent commencer car, suivant les formes de f et λ, cette équation peut appartenir à des types intégrables très simples ou à des types des plus rebelles. Si l'on veut avoir des résultats géométriques tangibles, il faut évidemment s'en tenir aux types simples.

Dans le même ordre d'idées, remarquons que les surfaces algébriques, dont l'équation (8) ne contient pas de second terme, ont un Λ particulièrement réduit.

Soit la surface d'équation

$$z^3\varphi_{m-3} + \star + \varphi_{m-2} + \varphi_{m-3} + \ldots + \varphi_0 = 0. \tag{10}$$

On a

$$\Lambda = -\frac{1}{z^3}, \qquad \lambda\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right) = -\frac{z^3}{x^3}.$$

Soit $f(x, y, z)$ réduit à une simple constante a. Alors l'équation (9) est

$$\frac{dz}{dx} = \frac{z}{x} + a\frac{z^3}{x},$$

d'où

$$\frac{z^2}{1 + az^2} = Cx^2 \qquad \text{et} \qquad \frac{z^2}{1 + az^2} = x^2\varphi\left(\frac{y}{x}\right),$$

pour équation des *cloisons* S, *à contour* C, *donnant un cône* OG *déterminant, dans la surface* (10), *un* $\Sigma\tau_i$ *égal à* aS', si S' est l'aire plane projection de S sur Oxy. Bien entendu, φ est une fonction arbitraire. Le résultat subsiste pour a nul; la cloison S est alors placée latéralement sur une surface qui devient aussi conique, avec O pour sommet, et, dans ces conditions, $\Sigma\tau_i$ est nul.

Nous n'insisterons pas davantage sur des résultats de ce genre qui pourraient être variés presque indéfiniment en cherchant à exprimer le $\Sigma\tau_i$ des surfaces algébriques les plus quelconques au moyen des aires S′, des volumes cylindriques U_z, des volumes tournants dus à S′, ..., et ce par l'intermédiaire de surfaces S dépendant d'équations linéaires aux dérivées partielles dont l'intégration dépend d'une équation différentielle du type (9).