Nouvelles annales de mathématiques

Certificats de mécanique rationnelle

Nouvelles annales de mathématiques 5e série, tome 2 (1923), p. 76-80
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1923_5_2__76_0>

CERTIFICATS DE MÉCANIQUE RATIONNELLE.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — *Une plaque carrée, homogène, pesante* PQRS *est assujettie aux liaisons suivantes, réalisées sans frottement : deux sommets consécutifs* P *et* Q *glissent sur une même circonférence* (C) *fixe dont le plan est horizontal et dont le diamètre est égal aux diagonales de la plaque. Celle-ci peut donc librement tourner autour de l'axe* Oz_1 *de la circonférence et autour du côté* PQ.

1° *Étudier le mouvement de la plaque. Limiter la discussion au cas particulier où, à l'instant initial, la plaque fait un angle* θ_0 *avec le plan de* (C) *et se trouve animée d'une rotation de vitesse* ω *autour de l'axe de* (C), *en cherchant seulement le sens de la variation initiale de l'angle* θ *du plan de la plaque et de celui de la circonférence.*

2° *La plaque étant immobile, verticale, au-dessous du plan de* (C), *on lui applique une percussion en son centre. Quel est l'état des vitesses immédiatement après la percussion?*

NOTATIONS. — ψ angle de PQ et d'un rayon fixe, Ox, de (C); θ angle de la plaque et du plan de C; $2a$ côté, m masse de la plaque; $m\alpha$, $m\beta$, $m\gamma$ projections de la percussion donnée sur les côtés PQ, QR et sur la normale au plan de la plaque.

INDICATIONS SUR LA SOLUTION. — La force vive est

$$2T = \frac{2ma^2}{3}[2\theta'^2 + (2 + 3\cos\theta + 2\cos^2\theta)\psi'^2],$$

et la fonction des forces

$$U = mga\sin\theta$$

(on suppose θ nul quand le carré est horizontal et placé vers l'extérieur de la circonférence et l'on suppose $0 < \theta < \pi$ quand la plaque est au-dessous du plan $z_1 = 0$). L'équation de Lagrange relative à ψ donne une intégrale première, on en obtiendra une autre par le théorème de la force vive et l'on constate aisément que l'intégration des équations du mouvement se ramène à des quadratures.

Pour la discussion, il suffit d'étudier le signe initial de $\frac{d^2\theta}{dt^2}$, dérivée que donne, par exemple, l'équation de Lagrange relative à θ. On constatera que la valeur remarquable de ω^2 (qui correspond à θ constant) est

$$\frac{3g}{a}\,\frac{\cos\theta_0}{\sin\theta_0\,(3+4\cos\theta_0)}.$$

Pour la deuxième partie appliquer le théorème du moment cinétique aux axes Oz_1 et PQ; les vitesses angulaires sont

$$\frac{3}{4}\,\frac{\alpha}{a} \quad et \quad \frac{3}{4}\,\frac{\gamma}{a}.$$

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Une roue de poids* P *est assimilable à une circonférence homogène de rayon* r, *dont le centre* O *est situé sur l'axe* Oz *de rotation, mais dont le plan* Q *fait un angle* α *avec le plan* R *normal à l'axe.*

On prend pour origine le centre O, *pour axe* Oy, *l'intersection de* Q *et* R.

1° *Équation de l'ellipsoïde d'inertie de la roue, relatif au point* O, *rapporté aux axes rectangulaires* $Oxyz$.

2° *Évaluer les réactions qui s'exerceraient pendant un mouvement de la roue, de vitesse angulaire* ω, *autour de* Oz *supposé horizontal et fixe, sur les tourillons qu'on assimilera à deux points situés sur* Oz, *à une distance* r *du centre.*

Application numérique : $\alpha = 1°$; ω *correspondant à* 200 *tours par minute,* $r = 1^{\text{m}}$.

3° *Question analogue à la précédente en supposant qu'au poids* P *s'ajoute un couple d'axe* Oz, *de moment connu* N.

INDICATIONS SUR LA SOLUTION. — 1° Un changement de coordonnées immédiat conduit à l'équation demandée.

2° et 3° Aux *réactions statiques* qui, en laissant de côté l'indétermination des composantes axiales, peuvent être prises verticales ascendantes et égales à $\frac{P}{2}$, il faut ajouter les *réac-*

tions dues au mouvement. Leur résistance sera nulle (centre de gravité sur l'axe) et leur mouvement résultant, relatif au point O, aura pour projection sur les axes Ox, Oy, Oz

$$L' = D\omega^2 - E\omega', \qquad M' = -E\omega^2 - D\omega', \qquad N' = 0.$$

Dans ces formules, qui sont classiques, D et E sont des produits d'inertie valant ici

$$D = 0, \qquad E = \frac{Pr^2}{2g}\sin\alpha\cos\alpha,$$

ω est la vitesse et ω' l'accélération angulaire. Dans le cas 2° ω' est nul; dans le cas 3° ω' vaut $\frac{N}{C}$ avec

$$C = \frac{Pr^2(1+\cos^2\alpha)}{2g}.$$

Dans l'un et l'autre cas il est bien aisé de réduire le couple ainsi obtenu à deux forces appliquées aux tourillons; forces qui, pour des valeurs données de ω et ω' auront des directions fixes par rapport à la plaque tandis que les réactions statiques ont des directions fixes par rapport au sol.

(Grenoble, juin 1920.)

Épreuve théorique. — *Une plaque carrée, homogène, pesante est assujettie à rester constamment tangente à un cylindre de révolution fixe à axe vertical sur lequel elle peut librement rouler et glisser sans frottement.*

Étudier son mouvement.

Montrer que les théorèmes généraux de la Mécanique permettent d'obtenir trois intégrales premières. Pousser l'intégration aussi loin que possible dans le cas particulier suivant :

Au début du mouvement le centre de gravité de la plaque se trouve sur le cylindre et la vitesse initiale de ce point est nulle Mais la plaque est animée d'un mouvement de rotation de vitesse angulaire connue autour de l'axe du cylindre.

Indications pour la solution. — On prendra pour axes l'axe du cylindre (axe des z) et deux axes horizontaux. Les paramètres choisis seront :

φ, angle avec Ox du plan diamétral de la génératrice de contact ;

u, distance du centre de gravité à la génératrice de contact ;

z, cote du centre de gravité ;

θ, angle d'une diagonale du carré avec l'horizontale du plan du carré.

On écrira l'équation des forces vives, l'intégrale des aires dans le plan xOy, le théorème des projections sur Oz $\left(\textit{qui donne } \frac{d^2 z}{dt^2} = \textit{const.}\right)$, l'équation de Lagrange relative à θ qui donne $\left(\frac{d\theta}{dt} = \text{const.}\right)$.

Les deux premières équations se réduisent respectivement à

$$(a^2 + k^2 + u^2)\varphi'^2 + u'^2 - 2au'\varphi' = h,$$
$$(a^2 + k^2 + u^2)\varphi' - au' = C$$

et l'élimination de φ' conduit à une équation différentielle en u.

Dans le cas particulier envisagé on a

$$\theta'_0 = z'_0 = 0, \qquad \varphi_0 = u_0 = 0, \qquad \varphi'_0 = \omega, \qquad u'_0 = a\omega :$$

on obtient immédiatement les valeurs correspondantes des constantes d'intégration C et h. La discussion est très simple et il n'y a pas lieu d'y insister.

Épreuve pratique. — *Une bielle d'accouplement de locomotive est composée d'un prisme à base rectangle de dimensions* 12×20. *Longueur de la bielle* $2l = 2^{\text{m}},40$. *L'effort de traction ou de compression qu'elle a à supporter sera pris en moyenne égal à* 30000^{kg}. *La manivelle a une longueur de* $0^{\text{m}},30$.

La locomotive a des roues de $2^{\text{m}},20$ *de diamètre et une vitesse maximum de* 120^{km} *à l'heure.*

Calculer l'effort moléculaire maximum de la bielle en tenant compte à la fois de l'effort de traction et des forces d'inertie.

(*Le mouvement de la bielle est un mouvement de translation.*)

Indications sur la solution. — En un point quelconque A de la bielle nous aurons à composer :

1° Un effort de traction ou de compression égal à $\frac{T}{S}$ $T = 30000$;
S section de la bielle;

2° La force centrifuge qui, sur une longueur dl de bielle, a la valeur

$$\rho S\, dl\, \omega^2 a,$$

avec $\omega = \frac{10^2}{3,3}$ *rad. par seconde.*

Cette force donne une composante de traction égale à

$$\rho S\, dl\, \omega^2 a \times \sin\alpha,$$

soit en tout

$$2\rho S\, l\, \omega^2 a \sin\alpha,$$

ou par unité de surface

$$2\rho\, l\, \omega^2 a \sin\alpha,$$

et un moment fléchissant, maximum au milieu de la bielle, égal à

$$M = \rho S \omega^2 a \cos\alpha \int_0^l l\, dl = \rho S \omega^2 a \cos\alpha \frac{l^2}{2}.$$

L'effort moléculaire normal qui en résulte est, d'après la formule de résistance composée,

$$(1) \qquad \frac{M}{w} + \frac{P}{S} = \frac{3\rho\omega^2 a \cos\alpha\, l^2}{2 \times 0,1.} + \frac{30000}{S} + 2\rho\, l\, \omega^2 a \sin\alpha.$$

Il faut donc chercher le maximum de

$$\frac{3}{0,2} \times l \cos\alpha + 2 \sin\alpha = 18 \cos\alpha + 2 \sin\alpha.$$

La valeur de α une fois calculée, l'effort moléculaire maximum est donné par (1). (Caen, juin 1920.)