

Certificats de mathématiques générales

Nouvelles annales de mathématiques 5^e série, tome 2
(1923), p. 355-360

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1923_5_2_355_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1923, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

CERTIFICATS DE MATHÉMATIQUES GÉNÉRALES.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — 1° Construire la courbe C lieu du point M de coordonnées

$$(1) \quad \begin{cases} x = \frac{a}{4} (e^{2u} - 2u), \\ y = ae^u \end{cases}$$

quand u varie de $-\infty$ à $+\infty$.

2° La tangente en M à la courbe coupe Ox en T, la tan-

gente en un second point M' coupe Ox en T'. Vérifier que $TT' = \text{arc } MM'$.

3° t représentant le temps, trouver la fonction $u = f(t)$ pour que les équations (1) soient celles d'un mouvement tel que, pour chaque position du mobile M, le vecteur vitesse soit égal à MT en grandeur, direction et sens.

4° En choisissant l'origine des temps on trouve $u = -t$. Étudier ce mouvement. Calculer l'accélération et ses composantes normale et tangentielle à l'instant t . En déduire le rayon de courbure à C. Étudier sa variation et calculer les coordonnées du point où ce rayon de courbure est minimum.

5° Former l'équation différentielle des courbes qui satisfont à la propriété géométrique de la 2^e question. Intégrer cette équation.

ÉPREUVE PRATIQUE. — 1° Intégrer le système d'équations différentielles

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} + 2 \frac{dy}{dt} - x - 1 &= 0, \\ \frac{d^2y}{dt^2} - 2 \frac{dx}{dt} - y &= 0, \end{aligned}$$

2° Déterminer les fonctions x et y qui vérifient ces équations et qui s'annulent, ainsi que leurs dérivées premières, pour $t = 0$.

3° Ces fonctions représentent les équations paramétriques d'une courbe. Aire limitée par l'arc compris entre l'origine et le point $t = \pi$, l'ordonnée de ce point et l'axe des x .
(Marseille, juin 1923.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. Établir, sous des conditions de convergence qu'on énoncera, la formule de développement

$$y = \frac{L(x + \sqrt{1+x^2})}{x} = 1 - \frac{1}{2} \frac{x^2}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{x^4}{5} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{x^6}{7} + \dots$$

Étudier la fonction y , et construire sa courbe représentative.

Montrer qu'il existe des polynomes simples $P(x)$, $P_1(x)$, $P_2(x)$, tels que y vérifie l'équation différentielle

$$(1) \quad yP(x) + y'P_1(x) + y''P_2(x) = 0.$$

Fort de la connaissance d'une solution particulière, achever l'intégration de cette équation. N'est-il pas possible d'effectuer cette intégration directement, d'après la méthode même qui conduit le plus simplement à la formation de l'équation (1) ?

II. On pose

$$x = \rho \cos \omega, \quad y = \rho \sin \omega.$$

Calculer les dérivées partielles f'_x et f'_y d'une fonction de la forme $f(x, y) = \varphi(\rho)$ [on appellera $\varphi(\rho)$ la fonction dérivée de $\varphi(\rho)$, par rapport à ρ].

Déterminer $\varphi(\rho)$ de manière que l'expression

$$\frac{f'_x dy - f'_y dx}{\sqrt{1 + f'^2_x + f'^2_y}}$$

soit une différentielle totale.

Soient f une fonction admettant cette différentielle, S la surface qui, en coordonnées rectangulaires, a pour équation $z = f(x, y)$. Exprimer les coordonnées d'un de ses points en fonction de sa cote z et de l'angle ω .

Déterminer les lignes asymptotiques de S par l'équation polaire de leur projection sur le plan xOy . Calculer l'angle sous lequel ces lignes coupent les sections de la surface par les plans $z = \text{const.}$

ÉPREUVE PRATIQUE. — Soient trois axes rectangulaires $Oxyz$, et quatre points

$$\begin{array}{ll} A(\lambda, 0, 1), & B(-\lambda, 0, 1), \\ C(0, \lambda, -1), & D(0, -\lambda, -1). \end{array}$$

Comment faut-il choisir λ pour que la figure $ABCD$ soit un tétraèdre régulier. Cette condition étant réalisée :

1° Évaluer les hauteurs du tétraèdre et l'aire d'une de ses faces.

2° Évaluer l'aire de sa section par un plan

$$z = h \quad (-1 < h < 1).$$

3° Trouver, par deux méthodes, le volume du tétraèdre.
(Poitiers, juin 1923.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — 1° Intégration de l'équation aux dérivées partielles

$$P(x, y, z) \frac{\partial z}{\partial x} + Q(x, y, z) \frac{\partial z}{\partial y} = R(x, y, z).$$

2° Étant donnés deux axes rectangulaires, on considère une courbe C, la tangente en un point quelconque M qui coupe l'axe des y en T. l'ordonnée du point M qui coupe l'axe des x en P.

Déterminer les courbes C telles que l'aire limitée par le segment OP, l'axe Oy, l'ordonnée PM et l'arc de courbe compris entre ces deux parallèles soit égale au produit de l'aire du trapèze OTMP par un nombre positif donné K. Les aires dont il s'agit ont des valeurs algébriques.

Il pourra être utile, pour intégrer l'équation différentielle du problème, de changer de variable indépendante et de poser $x = e^t$ (on se bornera aux abscisses positives).

Discuter les résultats suivant les valeurs de h .

MÉCANIQUE. — Une barre homogène de masse m , de longueur l , tourne dans un plan xOy autour de l'une de ses extrémités placée en O.

La barre non pesante, est sous l'influence d'un champ de forces. La force du champ agissant sur un élément de longueur infinitésimale, de coordonnées x, y , de masse infinitésimale m , a pour composantes sur les axes rectangulaires Ox, Oy :

$$X = my, \quad Y = mx.$$

1° La barre étant dans une position quelconque définie par l'angle θ qu'elle forme avec Ox , montrer que l'action

du champ sur la barre peut être réduite à une force unique. Trouver les composantes de cette force sur les axes et son point d'application.

Déterminer les positions d'équilibre de la barre.

2° On abandonne la barre sans vitesse initiale sur la partie positive de Ox . Trouver une équation permettant de déterminer en fonction du temps l'angle θ que forme la barre avec Ox .

Calculer la vitesse angulaire de la barre en fonction de sa position, indiquer l'allure et les limites du mouvement de rotation de la barre. (Nancy, juin 1923.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. Trouver une série entière y , se réduisant à l'unité pour $x = 0$ et vérifiant l'équation différentielle

$$(1) \quad xy'' + 2y' + xy = 0.$$

Quel est l'intervalle de convergence de cette série ?

On transforme l'équation (1), en posant $y = \frac{z}{x}$. Intégrer l'équation en z obtenue et retrouver, par ce moyen, la série déterminée précédemment.

II. Soit le plan

$$x \cos \varphi + y \sin \varphi + kz = f(\varphi),$$

où k désigne une constante et $f(\varphi)$ une fonction donnée du paramètre variable φ . Déterminer l'arête de rebroussement de l'enveloppe de ce plan. Démontrer que cette courbe est une hélice. Calculer, en fonction de φ , son arc, sa courbure et sa torsion.

III. Sur la chaînette définie par l'équation

$$y = \operatorname{ch} x,$$

on enroule un fil, de telle manière qu'une de ses extrémités M se trouve au sommet S , l'autre extrémité étant fixée au point P , d'abscisse a . L'axe Oy étant supposé vertical et dirigé vers le haut, on attache à l'extrémité M

du fil une petite masse pesante et on l'abandonne sans vitesse initiale.

1° Calculer les coordonnées de M au temps t .

2° Calculer la tension du fil en fonction de l'ordonnée de M.

3° Calculer, en fonction de a , les coordonnées du point Q qui limite l'oscillation de M. Lieu de Q quand P décrit la chaînette.

EPREUVE PRATIQUE. — On considère la courbe Γ , dont les coordonnées d'un point (x, y) , exprimées en fonction d'un paramètre t , sont

$$x = \pm t \sqrt{\frac{(t+2)(t^2+t+2)}{t+3}},$$

$$y = \pm (t+1)^2 \sqrt{\frac{-t+1}{t+3}}.$$

1° Calculer, à un centième près, les coordonnées des points réels où la tangente est parallèle à l'un des axes, ainsi que les valeurs de t correspondantes.

2° Calculer, à un centième près, les rayons de courbure aux points de paramètre t égal à -2 , à -1 et à $+1$.

(Clermont, juin 1923.)

