NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

BERTRAND GAMBIER

Asymptotiques non rectilignes d'une surface réglée et équation de Riccati correspondante

Nouvelles annales de mathématiques 5e série, tome 2 (1923), p. 321-323

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1923_5_2__321_0>

[O'4f]

ASYMPTOTIQUES NON RECTILIGNES D'UNE SURFACE RÉGLÉE ET ÉQUATION DE RICCATI CORRESPONDANTE;

PAR BERTRAND GAMBIER,
Professeur à la Faculté des Sciences de Lille.

1. On sait que sur une surface réglée S non développable les asymptotiques non rectilignes découpent sur deux génératrices D, D′, voisines ou non voisines, deux divisions en homographie : un calcul classique très simple montre en effet que, si les équations paramétriques de S sont

$$(1) \qquad x = a + a_1 v, \qquad y = b + b_1 v, \qquad z = c + c_1 v,$$

où a, b, c, a_1, b_1, c_1 ne dépendent que de u, l'équation différentielle des asymptotiques est de la forme

$$(2) \qquad \frac{dv}{du} = Uv^2 + U_1 v + U_2,$$

où U, U_1 et U_2 sont des fonctions de u seul : la propriété en résulte.

2. Ce résultat admis, si les asymptotiques $A, A_1, \ldots, A_n$ découpent sur D et D′ les couples correspondants (M, M'), (M_1, M'_1), ..., (M_n, M'_n), ..., les droites MM', $M_1M'_1$, ..., $M_nM'_n$, ... joignant les points homologues de cette homographie engendrent une quadrique et comme cela subsiste, même si D′ se rapproche indéfiniment de D, à la limite les tangentes asymptotiques MT, M_1T_1, ..., M_nT_n, ... autres que D, menées à S aux divers points de D engendrent une quadrique q nécessairement osculatrice à S tout le long de D.

3. Je ferai remarquer que dans la solution du problème d'analyse d'agrégation 1923 ([1]), j'ai indiqué une méthode différente, ne supposant connu aucun résultat de calcul, pour arriver à démontrer que les tangentes $MT, M_1T_1, \ldots, M_nT_n, \ldots$ engendrent une quadrique q. Cette méthode est basée sur la considération des quadriques contenant D et une autre génératrice D′, qui se rapproche indéfiniment de D, puis sur la considération de la quadrique contenant D, et deux génératrices D′, D″ distinctes de D, qui se rapprochent ensuite indéfiniment de D, indépendamment l'une de l'autre. J'ai ainsi démontré les deux résultats suivants :

a. Il existe un système linéaire ∞^3 *de quadriques* Q, *se raccordant avec* S *tout le long de* D.

b. Dans ce système, il y a une quadrique q et une seule osculatrice à S *tout le long de* D; *les génératrices de q, de système opposé à* D, *sont les tangentes asymptotiques à* S *tout le long de* D.

4. Je crois instructif de montrer que cette seconde méthode permet de démontrer directement, sans aucun calcul, que quatre asymptotiques A, A_1, A_2, A_3, quelconques non rectilignes, découpent sur les génératrices D, D′, … quatre points de rapport anharmonique constant, d'où résultera bien que v, étudié comme fonction de u sur une asymptotique, satisfera à une équation de Riccati de la forme (2). Les deux méthodes diffèrent donc en ce que l'hypothèse de l'une est au contraire la conclusion de l'autre et inversement.

Il suffit de démontrer que les asymptotiques $A, A_1, \ldots, A_n \ldots$ découpent sur D et D′ des couples (M, M′), …,

([1]) Voir *Nouvelles Annales*, 5e série, t. II, 1923-1924, p. 144-157.

(M_n, M'_n) en homographie; ou encore, si l'on considère le rapport anharmonique

$$\rho = (M M_1 M_2 M_3), \tag{3}$$

ce rapport est une fonction de u dont nous calculerons la valeur, $\rho + \Delta\rho$, en série ordonnée suivant les puissances de Δu, quand on passe à la génératrice $u + \Delta u$:

$$\rho + \Delta\rho = \rho + \frac{\Delta u}{1}\left(\frac{d\rho}{du}\right) + \frac{\Delta u^2}{1.2}\left(\frac{d^2\rho}{du^2}\right) + \ldots, \tag{4}$$

et il suffit de montrer que le coefficient de Δu est nul, quel que soit u, pour montrer que ρ est constant. En effet, supposons D′ infiniment voisine de D, correspondant à la valeur $u + \Delta u$, où Δu est considéré comme infiniment petit principal. Chaque segment MM', $M_1 M'_1$, ..., $M_n M'_n$, ... est alors infiniment petit du premier ordre; sur la tangente MT prenons une longueur $M\mu$ égale, par exemple, à MM' et traçons la génératrice Δ de q, de même système que D, issue de μ; Δ perce chaque tangente $M_1 T_1$, ..., $M_n T_n$, ... aux points $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n, \ldots$, chaque segment $M_n \mu_n$ est lui aussi du premier ordre, donc la distance $\mu_n M'_n$ est du second ordre. Le rapport anharmonique

$$\rho + \Delta\rho \quad \text{ou} \quad (M\, M'_1\, M'_2\, M'_3),$$

ne diffère donc du rapport

$$(\mu\,\mu_1\,\mu_2\,\mu_3) = (M\, M_1\, M_2\, M_3) = \rho$$

que d'une quantité du second ordre, cela exige

$$\frac{d\rho}{du} = 0$$

Le rapport ρ est donc une constante : tout le reste en découle.

C. Q. F. D.