H. BEGHIN

Sur certains problèmes de frottement

Nouvelles annales de mathématiques 5e série, tome 2 (1923), p. 305-312

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1923_5_2__305_0>

[R 9a]

SUR CERTAINS PROBLÈMES DE FROTTEMENT;

PAR H. BEGHIN.

Les *Nouvelles Annales* ont publié récemment un article de M. Thiry (*Étude d'un problème particulier où intervient le frottement de glissement*, mars 1923). Cet article est relatif aux difficultés que présente l'application de la Mécanique classique aux problèmes de frottement.

Les cas d'indétermination et d'incompatibilité, rencontrés dans les problèmes de frottement, ont été signalés par M. Painlevé (*Leçons sur le frottement*, 1895; *C. R. Acad. Sc.*, t. **121**, 1895, p. 112; t. **140**, 1905, p. 702; t. **141**, 1905, p. 401; 546); ils ont été discutés également par M. Lecornu (*C. R.*, t. **140**, 1905, p. 635, 847), par M. de Sparre (*C. R.*, t. **141**, p. 310; *Bull. de la Soc. math.*, t. **34**, 1906, p. 41, 108; t. **35**, 1907, p. 141); *voir* aussi plusieurs articles de F. Klein, R. v. Mises, F. Pfeiffer, L Prandtl, G. Hamel, J. Wellstein dans le *Zeitschr. Math. u. Phys.*, t, **58**, 1910, et t. **61**, 1913.

Quoique ces questions aient été ainsi longuement discutées, il semble qu'il y ait place encore pour quelques réflexions.

Tous les auteurs sont d'accord pour estimer que la loi de Coulomb n'est qu'une grossière approximation, approximation précieuse cependant puisque, avec des moyens simples, elle permet l'étude de phénomènes fort complexes, et l'on ne peut nier que cette étude —

même approchée — présente un intérêt pratique certain.

Je ne dirai que peu de chose de l'*incompatibilité* qui fait l'objet principal des articles cités.

Le fait que ces cas singuliers entraînent des discontinuités dans les vitesses, donc de véritables percussions sans vitesse relative normale des solides en contact, avait paru difficilement admissible. La loi de Coulomb sembla mise en défaut, mais on put lever l'objection en tenant compte de l'élasticité des solides naturels.

Je me bornerai à citer un exemple concret qui, à mon avis, présente l'avantage de mettre le plus possible la loi de Coulomb hors de cause.

Je suppose un individu marchant à la vitesse v sur un sol soigneusement cimenté. Il tient à la main l'extrémité B de sa canne, l'autre extrémité A touchant le sol à quelque distance en avant.

Si l'inclinaison de la canne est inférieure à une certaine valeur, l'observateur poursuit sa marche sans incident. Mais, si la nature du sol vient à varier, si, par exemple, une partie du sol est humide, l'autre sèche, l'observateur, arrivant à la vitesse v sur une région moins glissante, est instantanément arrêté par sa canne.

L'expérience est facile à faire sous cette forme grossière, et à répéter, sous une forme plus précise, au moyen d'une tige AB articulée en B à un corps qu'on déplace à la vitesse v sur le sol.

Lorsque la canne arrive en glissant à la limite des deux régions, la composante tangentielle T et la composante normale N de la réaction ont les valeurs T_0 et N_0; je pose

$$f_0 = \frac{T_0}{N_0}.$$

L'incompatibilité se manifeste aussitôt, si l'inclinaison de la canne est suffisante, sous la seule condition que, pour toute valeur de N supérieure ou égale à N_0, sur la seconde région du sol, le rapport $\frac{T}{N}$, dans l'hypothèse du glissement à la vitesse v, soit supérieur à f_0. Cette condition se réalise facilement, puisque l'expérience montre que ce rapport croît avec N.

Le mécanisme de l'arc-boutement qui se produit ainsi est simple à imaginer : les éléments matériels du sol et de la canne s'entraînent mutuellement; la canne tourne infiniment peu autour de son extrémité B, se comprimant de plus en plus, jusqu'à ce que la réaction qu'elle exerce en B sur le corps auquel elle est articulée, soit suffisante pour produire l'arrêt.

Dans les cas d'*indétermination* qu'ils examinent, les auteurs s'efforcent généralement de faire un choix parmi les différentes solutions fournies par la Mécanique classique. Je ne crois pas qu'il y ait lieu de choisir entre ces solutions, qui toutes me semblent acceptables au même titre et réalisables, plus ou moins facilement d'ailleurs, certaines d'entre elles pouvant naturellement être instables.

Soient, par exemple, deux murs presque verticaux surplombant légèrement, l'un en face de l'autre. Entre ces deux murs, je place une barre horizontale AB : cette barre reste-t-elle en équilibre? La Mécanique classique indique comme possibles : 1° une chute verticale avec l'accélération de la pesanteur; 2° l'équilibre avec, comme réactions en A et B, les composantes changées de sens du poids P suivant les droites IA et IB, I désignant un point arbitraire situé entre le point O, milieu de AB, et le point C commun aux génératrices supérieures des deux cônes de frottement.

Qu'indique l'observation? Si l'on se borne à appuyer légèrement la barre sur les murs avant de l'abandonner, elle tombe. Si on la coince fortement, elle reste en équilibre, et les réactions, qui sont dans un rapport étroit avec l'état de compression de la barre, dépendent évidemment de l'effort plus ou moins grand avec lequel on l'a coincée. Si même le coefficient de frottement est assez grand, et si la barre est facilement déformable (il s'agit, bien entendu, de déformations infiniment petites), on conçoit que la barre puisse, pour ainsi dire, rouler sans glisser sur les murs en se déformant, pendant qu'on essaie de la coincer, revenant par suite en arrière au moment où on l'abandonne, puis tombant, sans qu'on puisse jamais la maintenir en équilibre par cette méthode.

Je reprends aussi le problème de la canne, en le modifiant légèrement : Au lieu de l'articuler en son extrémité B, je la suppose articulée en son milieu O à un corps se déplaçant à la vitesse v sur le sol.

Si la canne fait avec la verticale un angle inférieur à l'angle de frottement, la mécanique classique indique ou bien qu'il y a incompatibilité, ou bien que le mouvement se poursuit avec une réaction nulle au contact du sol. L'observation confirme ces deux solutions : le mouvement peut se poursuivre sans difficulté, mais si la canne vient à exercer la moindre pression sur le sol, il y a arrêt brusque. C'est ce qui se produira, par exemple, si la barre est abandonnée dans un certain état de compression : en se détendant, elle amorcera fatalement l'arc-boutement.

Soit de même un problème de M. Chaumat indiqué par M. Painlevé (*C. R.*, t. 140, 1905, p. 401). Dans un plan vertical, un disque circulaire est en contact avec une droite inclinée parfaitement polie Ox et avec une horizontale Oy dépolie qui lui est tangente en son point le plus haut. Il est abandonné sans vitesse, mais on lui applique un couple N.

Soient r le rayon du disque, P le poids, f le coefficient de frottement, α l'angle $x\widehat{O}y$, je suppose

$$f > \tang \alpha.$$

Si le couple N est supérieur à

$$\frac{fPr}{f\cot\alpha - 1},$$

on vérifie facilement que la Mécanique classique fournit deux solutions : ou bien une descente du disque le long de Ox, ou bien l'arc-boutement. C'est la descente qui se produira, si l'on abandonne le disque en l'appuyant légèrement sur l'horizontale Oy; mais, si on l'applique plus fortement, on amorcera ainsi l'arc-boutement.

On pourrait multiplier les exemples; je me bornerai à dire quelques mots du problème de M. Thiry. Pour donner plus de valeur à l'indétermination constatée, il me semble préférable de supposer les liaisons unilatérales, le corps que l'on étudie reposant sur le mur vertical et sur le sol à la manière d'une échelle. Peut-être, en effet, pourrait-on objecter, dans le cas de liaisons bilatérales, que, chaque contact se trouvant ainsi doublé, on rassemble dans un même énoncé quatre problèmes différents? On serait tenté d'y voir une cause d'indétermination.

Ainsi modifié, le problème reste indéterminé, lorsque le centre de gravité se trouve dans celle des deux régions hachurées qui est à gauche de la figure (p. 215). Il est intéressant de signaler aussi une infinité de solutions, lorsque le centre de gravité se trouve sur la branche non figurée de l'hyperbole H_1 : dans ces solutions, le corps glisse en B et se soulève en A dans une direction variable.

Enfin, lorsqu'il y a équilibre, le calcul des réactions ne donne-t-il pas une infinité de solutions?

Ces cas d'indétermination n'ont rien qui doive nous surprendre : *la Mécanique classique n'analyse pas les déformations infiniment petites, mais elle n'en méconnaît pas l'existence :* lorsqu'on dit, en Mécanique classique, qu'on abandonne tel solide dans telles conditions de position et de vitesse, il n'est pas question de l'état initial de ses déformations infiniment petites, on ne se donne que sa position d'ensemble et l'état initial de ses vitesses dans un déplacement d'ensemble. Mais, si l'on veut que les problèmes que l'on résout aient une portée pratique, il est indispensable d'admettre un état initial arbitraire de déformations infiniment petites, sous réserve, bien entendu, que ces déformations soient assez petites pour ne pas mettre en jeu des forces infiniment grandes, telles que celles qu'on rencontre dans les chocs et percussions : En d'autres termes, on doit pouvoir négliger l'énergie propre de cette déformation.

Dans ces conditions, n'est-il pas remarquable que la Mécanique classique puisse si souvent nous donner une réponse unique indépendante des déformations initiales et de la manière dont les corps sont susceptibles de réagir? *S'il arrive, dans certains cas, que nous rencontrions plusieurs solutions, c'est que les données sont insuffisantes : elles auraient dû porter sur les déformations initiales des corps et sur leur nature élastique.*

Cet état initial ne peut, en effet, se maintenir sans modification, puisque les forces qui le maintenaient artificiellement disparaissent à l'instant initial et sont remplacées par telles ou telles réactions. L'état des déformations évolue donc, plus ou moins gêné par les frottements, et l'on conçoit que, suivant le point de départ de cette évolution, il puisse tendre vers des états différents comportant soit l'un, soit l'autre des mouvements d'ensemble fournis par la Mécanique classique.

Les problèmes de *choc avec frottement* présentent des difficultés particulières : lorsque deux solides se heurtent, si la distribution des vitesses dans chacun d'eux avant le choc est conforme à la cinématique des solides invariables, il n'en est évidemment plus de même pendant le choc : il est vraisemblable, en effet, que, si, par exemple, un solide heurte un obstacle fixe rigoureusement indéformable, les éléments du solide qui se trouvent au contact de l'obstacle se trouvent immédiatement arrêtés, puis cette zone influencée par le choc s'étend de proche en proche, sa limite se propageant à l'intérieur du solide avec une certaine vitesse jusqu'à ce que les points les plus éloignés soient eux-mêmes avertis du choc.

La Mécanique classique, qui n'analyse pas ces déformations, est tenue de suppléer à cette analyse par des hypothèses : *invariabilité de l'orientation du plan tangent commun*, *rigidité des solides à l'instant où cesse la percussion de contact.* L'intégration des équations du mouvement, pendant la durée du choc, permet alors de résoudre un certain nombre de problèmes simples en faisant abstraction de ce qui se passe pendant le choc.

Si le frottement est pris en considération, le problème se complique. La Mécanique classique, comme on l'a vu dans plusieurs articles récents (1), suppose appli-

(1) H. V., juin 1923; J. PERÈS, déeembre 1923 et mars 1924.

cables les lois habituelles du frottement; son coefficient est supposé constant. Pour orienter la force de frottement à chaque instant, il faut alors suivre la variation de la vitesse de glissement. Le système de quantités de mouvement et cette vitesse de glissement sont exprimés à chaque instant comme si chacun des corps conservait sa rigidité, quoique cette rigidité soit évidemment incompatible avec le choc lui-même.

Cette hypothèse revient à admettre que les régions, au voisinage immédiat du contact, sont seules déformées et que ces déformations sont toutes orientées à peu près normalement au plan tangent, malgré l'obliquité de la réaction. On peut dire aussi que la Mécanique classique raisonne sur des solides rigoureusement invariables recouverts d'une écorce infiniment mince, seule déformable normalement à son plan tangent. Les déformations de cette écorce aux points où elle est heurtée sont permanentes dans le cas de corps inélastiques; elles sont uniquement fonctions de la réaction, et s'annulent avec elle, dans le cas de corps parfaitement élastiques. Dans quelle mesure les corps de la nature se comportent-ils comme ces corps théoriques, c'est surtout à l'expérience qu'il appartient de se prononcer.