Nouvelles annales de mathématiques

R. Goormaghtigh

Sur une généralisation des théorèmes de Jamet

Nouvelles annales de mathématiques 5e série, tome 2 (1923), p. 254-260

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1923_5_2__254_1>

[$O^1 2e$]

SUR UNE GÉNÉRALISATION DES THÉORÈMES DE JAMET;

PAR R. GOORMAGHTIGH.

Un Mémoire publié en 1887 par M. V. Jamet dans les *Annales de l'École Normale supérieure* (1) con-

(1) Série 3, t. IV, supplément.

tient trois théorèmes remarquables qu'on peut énoncer ainsi :

Si deux courbes triangulaires symétriques d'indices n_1 et n_2, ayant même triangle de symétrie (ou deux courbes de Lamé d'indice n_1 et n_2 ayant mêmes axes) se touchent en un point, leurs courbures en ce point sont dans le rapport de $(n_1 - 1)$ *à* $(n_2 - 1)$.

Si deux surfaces tétraédrales symétriques d'indices n_1 et n_2, ayant même tétraèdre de symétrie (ou deux surfaces de Lamé d'indices n_1 et n_2 ayant même axes) se touchent en un point, leurs indicatrices en ce point sont homothétiques, le rapport d'homothétie étant $(n_2 - 1)^{\frac{1}{2}} : (n_1 - 1)^{\frac{1}{2}}$.

Si deux courbes tétraédrales symétriques d'indices n_1 et n_2, ayant même tétraèdre de symétrie, se touchent en un point, leurs plans osculateurs en ce point coïncident et leurs courbures sont dans le rapport de $(n_1 - 1)$ *à* $(n_2 - 1)$.

1. Considérons maintenant [1] les courbes ayant pour équation, en coordonnées cartésiennes,

$$\sum_1^3 \alpha_i [f_i(x, y)]^n = 0, \tag{1}$$

f_1, f_2, f_3 désignant trois fonctions quelconques des deux variables x, y. A chaque valeur de l'indice n, il correspond une courbe (1) ayant en un point donné une tangente donnée. Dérivant (1) par rapport à x, on a l'équa-

---

[1] Une note présentée à l'Académie des Sciences (18 novembre 1918) résume les résultats qui suivent ainsi que quelques autres généralisations des théorèmes de Jamet.

tion

$$(2)\qquad \sum_1^3 \alpha_i[f_i(x,y)]^{n-1}\left(\frac{\partial f_i}{\partial x}+\frac{\partial f_i}{\partial y}y'\right)=0,$$

qui, combinée avec (1), donne lieu aux relations

$$(3)\qquad \frac{\alpha_1[f_1(x,y)]^{n-1}}{\Phi_1(x,y,y')}=\frac{\alpha_2[f_2(x,y)]^{n-1}}{\Phi_2(x,y,y')}=\frac{\alpha_3[f_3(x,y)]^{n-1}}{\Phi_3(x,y,y')},$$

dans lesquelles les fonctions Φ ne dépendent que de x, y, y'. D'autre part, dérivons encore (1) par rapport à x, nous aurons l'équation

$$\begin{aligned}(n-1)&\sum_1^3 \alpha_i[f_i(x,y)]^{n-2}\left(\frac{\partial f_i}{\partial x}+\frac{\partial f_i}{\partial y}y'\right)^2\\ &+\sum_1^3 \alpha_i[f_i(x,y)]^{n-1}\\ &\qquad\times\left(\frac{\partial^2 f_i}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 f_i}{\partial x\,\partial y}y'+\frac{\partial^2 f_i}{\partial y^2}y'^2+\frac{\partial f_i}{\partial y}y''\right)=0,\end{aligned}$$

qui, par des calculs faciles et eu égard à (3), peut se mettre sous la forme

$$n\mathrm{K}-\mathrm{L}+\frac{\mathrm{J}}{\rho}=0,$$

où ρ désigne le rayon de courbure de (1) au point (x, y) et où K, L, J sont des fonctions de x, y, y' seuls. La dernière relation donne lieu aux théorèmes suivants :

Soient f_1, f_2, f_3 trois fonctions données de deux variables; si trois courbes

$$\sum_1^3 \alpha_i[f_i(x,y)]^n=0,$$

d'indices n_1, n_2, n_3 se touchent en un point, leurs *rayons de courbure* ρ_1, ρ_2, ρ_3 *correspondant à ce point sont liés par la relation*

$$(4) \qquad \frac{n_2-n_3}{\rho_1}+\frac{n_3-n_1}{\rho_2}+\frac{n_1-n_2}{\rho_3}=0.$$

Si quatre des courbes considérées sont tangentes en un même point, le rapport anharmonique de leurs courbures en ce point est égal à celui de leurs indices.

2. Applications. — *a. Coordonnées barycentriques.* — On déduit des développements précédents des propriétés identiques pour les courbes dont l'équation en coordonnées barycentriques s'écrit

$$\sum_1^3 \alpha_i[f_i(\mu_1, \mu_2, \mu_3)]^n = 0.$$

Quand les fonctions f sont linéaires et quand on prend $n_3 = 1$, $1:\rho_3$ est nul, et la relation (4) donne le théorème de Jamet.

b. Courbes $ax^l + by^m + c = 0$. — Soient A et B les points où la tangente en un point M de la courbe

$$(5) \qquad ax^l + by^m + c = 0$$

coupe les axes Ox, Oy, D et E ceux où la normale coupe ces axes, A′, B′ les points où cette normale rencontre les perpendiculaires élevées en A sur Ox et en B sur Oy; posons $A'D = q$, $B'E = p$. Pour étudier la courbure de (5) au point M, prenons

$$f_1(x,y) = x^{\frac{l}{m}}, \qquad f_2(x,y) = y, \qquad f_3(x,y) = 1.$$

Lorsque $n_1 = m$, (1) donne la courbe (5); pour $n_2 = 1$

et $n_3 = \frac{m}{l}$, on a des paraboles dont les équations ont les formes

$$ax^{\frac{l}{m}} + by + c = 0, \qquad ax + by^{\frac{m}{l}} + c = 0;$$

d'après une propriété connue, on aura donc

$$\frac{1}{\rho_2} = \frac{1}{p}\left(1 - \frac{l}{m}\right), \qquad \frac{1}{\rho_3} = \frac{1}{q}\left(1 - \frac{m}{l}\right)$$

et, par suite ([1]),

$$\frac{1}{\rho_1} = \frac{1-l}{p} + \frac{1-m}{q}.$$

c. Courbes $\lambda_1 r_1^n + \lambda_2 r_2^n = a$. — Soient $(a_1 b_1)$, $(a_2 b_2)$ les coordonnées de deux points F_1, F_2 du plan et posons

$$f_1(x, y) = \sqrt{(x - a_1)^2 + (y - b_1)^2},$$
$$f_2(x, y) = \sqrt{(x - a_2)^2 + (y - b_2)^2}, \qquad f_3(x, y) = 1;$$

on obtient alors les courbes dont l'équation en coordonnées bipolaires a la forme

$$(6) \qquad \lambda_1 r_1^n + \lambda_2 r_2^n = a.$$

Pour $n = 1$ et $n = 2$ cette équation représente respectivement une ovale de Descartes et un cercle. Soient M un point de la courbe (6), F_1' et F_2' les points où les perpendiculaires élevées sur MF_1 et MF_2 en F_1 et F_2 rencontrent la normale en M à la courbe, F_1'' et F_2'' ceux où les perpendiculaires élevées en F_1' et F_2' sur la normale coupent les droites MF_1 et MF_2, N et T les intersections de la normale avec $F_1 F_2$ et $F_1'' F_2''$. Les points N et T sont les centres de courbure du cercle et de l'ovale de Descartes, qui correspondent aux cas de $n = 2$ et

([1]) R. Godefroy, *Journal de l'École Polytechnique*, 1892, p. 37.

$n = 1$ et qui touchent la courbe considérée en M; on aura donc, C désignant le centre de courbure de la courbe (6) en M,

$$\frac{1}{MC} = \frac{n-1}{MN} + \frac{2-n}{MT}.$$

Pour $n = \frac{3}{2}$, la division MNTC est harmonique.

3. Les développements du paragraphe 1 s'étendent sans difficulté au cas des surfaces; on obtient alors ce théorème :

Si trois surfaces

$$\begin{gathered} \alpha_1[f_1(x, y, z)]^n + \alpha_2[f_2(x, y, z)]^n \\ + \alpha_3[f_3(x, y, z)]^n + \alpha_4[f_4(x, y, z)]^n = 0, \end{gathered}$$

correspondant aux indices n_1, n_2, n_3 se touchent en un point, leurs directions asymptotiques en ce point sont en involution et leurs courbures moyennes σ_1, σ_2, σ_3 sont liées par la relation.

$$(n_2 - n_3)\sigma_1 + (n_3 - n_1)\sigma_2 + (n_1 - n_2)\sigma_3 = 0.$$

Si l'on suppose les fonctions f linéaires et si l'on pose $n_3 = 1$, on retrouve encore le théorème de Jamet.

4. Considérons enfin les courbes gauches ayant pour équations cartésiennes

$$\begin{gathered} \alpha_1[f_1(x, y, z)]^n + \alpha_2[f_2(x, y, z)]^n + \alpha_3[f_3(x, y, z)]^n = 0, \\ \beta_2[\varphi_2(x, y, z)]^n + \beta_3[\varphi_3(x, y, z)]^n + \beta_4[\varphi_4(x, y, z)]^n = 0, \end{gathered}$$

où f et φ désignent des fonctions données.

Si par un point M, où se touchent trois de ces courbes, on mène une parallèle δ à l'un des axes de coordonnées et que, sur les binormales des trois *courbes, on prend, à partir de* M, *les segments* MB_1, MB_2, MB_3 *égaux à leurs rayons de courbure, les plans menés par* B_1, B_2, B_3 *perpendiculairement à* MB_1, MB_2, MB_3 *déterminent sur* δ *les segments* MD_1, MD_2, MD_3 *liés par la relation*

$$\frac{n_2 - n_3}{MD_1} + \frac{n_3 - n_1}{MD_2} + \frac{n_1 - n_2}{MD_3} = 0.$$

Considérons en particulier deux triangles de l'espace, ainsi que les courbes Γ_n intersections des cônes projetant de deux points fixes quelconques deux courbes triangulaires symétriques d'indices n, ayant les triangles donnés pour triangles de symétrie; deux courbes Γ_{n_1} et Γ_{n_2} tangentes en un point ont même plan osculateur en ce point. Si, dans le théorème qui précède, on suppose f et φ linéaires et qu'on pose $n_3 = 1$, on voit que les courbures de Γ_{n_1} et Γ_{n_2} sont dans le rapport de $(n_1 - 1)$ à $(n_2 - 1)$. Le théorème de Jamet s'obtient quand les triangles et points donnés sont des faces et les sommets opposés d'un tétraèdre.