

JOSEPH PÉRÈS

Choc de deux solides avec frottement

Nouvelles annales de mathématiques 5^e série, tome 2
(1923), p. 216-231

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1923_5_2__216_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1923, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

[R9b]

CHOC DE DEUX SOLIDES AVEC FROTTEMENT;

PAR JOSEPH PÉRÈS.

1. Dans un article récent ⁽²⁾, j'ai utilisé quelques remarques géométriques simples pour la discussion du choc de deux plaques mobiles dans un plan *lorsqu'il y a frottement au point de contact (unique)*. Passons au

(¹) GOURSAT, *Leçons sur le problème de Pfaff*, n° 74.

(²) *Nouvelles Annales*, décembre 1923, p. 98.

choc de deux solides quelconques : des considérations géométriques, à peine plus compliquées, permettent de présenter la discussion sous une forme très intuitive et de retrouver, de façon peut-être plus élémentaire, les résultats de l'élégante et très complète analyse de Darboux (1).

2. Soit donc un solide quelconque (S) qui vient en contact avec un obstacle fixe (Σ). Nous prendrons des axes de coordonnées rectangulaires $Oxyz$, l'origine O étant le point de contact et l'axe Oz étant la normale commune en O à (S) et (Σ) [sens positif extérieur à l'obstacle]. Nous appellerons a, b, c les coordonnées du centre de gravité G de (S), ξ, η, ζ les composantes de la percussion qui s'exerce sur (S); α, β, γ seront les composantes de la vitesse du point G et p, q, r celles de la rotation instantanée du solide, avec les indices 0 et 1 au début et à la fin du choc. Enfin m sera la masse de (S) et

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 - 2Dyz - 2Ezx - 2Fxy = 1$$

sera l'équation de l'ellipsoïde central d'inertie de (S).

On a les équations

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 - \alpha_0 = \frac{\xi}{m}, \\ \beta_1 - \beta_0 = \frac{\eta}{m}, \\ \gamma_1 - \gamma_0 = \frac{\zeta}{m}; \end{array} \right.$$

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} A(p_1 - p_0) - F(q_1 - q_0) - E(r_1 - r_0) = c\eta - b\zeta, \\ -F(p_1 - p_0) + B(q_1 - q_0) - D(r_1 - r_0) = a\zeta - c\xi, \\ -E(p_1 - p_0) - D(q_1 - q_0) + C(r_1 - r_0) = b\xi - a\eta, \end{array} \right.$$

(1) *Bull. Sc. math.*, t. 1, 1880, p. 146-160.

et les formules (2) peuvent être résolues sous la forme

$$(2') \quad \begin{cases} p_1 - p_0 = \frac{1}{2} \frac{\partial f(\lambda, \mu, \nu)}{\partial \lambda}, \\ q_1 - q_0 = \frac{1}{2} \frac{\partial f(\lambda, \mu, \nu)}{\partial \mu}, \\ r_1 - r_0 = \frac{1}{2} \frac{\partial f(\lambda, \mu, \nu)}{\partial \nu}, \end{cases}$$

$f(\lambda, \mu, \nu)$ étant la forme quadratique adjointe de celle qui définit l'ellipsoïde d'inertie et λ, μ, ν étant les seconds membres des (2).

Introduisons la vitesse, par rapport à (Σ) , du point O de (S); elle a les composantes

$$U = x + rb - qc, \quad V = \beta + pc - ra, \quad W = \gamma + qa - pb,$$

avec, au début ou à la fin du choc, les indices 0 ou 1. Les équations précédentes entraînent

$$\begin{aligned} U_1 - U_0 &= \frac{\xi}{m} + \frac{1}{2} b f'_\nu(\lambda, \mu, \nu) - \frac{1}{2} c f'_\mu(\lambda, \mu, \nu) \\ &= \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}{2m} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} f(c\eta - b\zeta, a\zeta - c\xi, b\xi - a\eta) \right] \end{aligned}$$

et des formules analogues pour $V_1 - V_0, W_1 - W_0$. En désignant par $\varphi(\xi, \eta, \zeta)$ la forme quadratique (définie positive) qui est entre crochets, il vient donc enfin

$$(3) \quad \begin{cases} U_1 - U_0 = \frac{\partial \varphi(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \xi}, \\ V_1 - V_0 = \frac{\partial \varphi(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \eta}, \\ W_1 - W_0 = \frac{\partial \varphi(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \zeta}. \end{cases}$$

Pendant l'intervalle de temps très court que dure le

choc, les composantes de la vitesse du point de contact passent des valeurs U_0, V_0, W_0 aux valeurs U_1, V_1, W_1 . Soient U, V, W (sans indice) les valeurs de ces composantes à un instant quelconque t du choc; on peut écrire, pour toute partie du choc, des formules analogues aux précédentes, de sorte qu'en envisageant l'intervalle $t, t + dt$, on aura

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{dU}{dt} = \frac{\partial \varphi(X, Y, Z)}{\partial X}, \quad \frac{dV}{dt} = \frac{\partial \varphi(X, Y, Z)}{\partial Y}; \\ \frac{dW}{dt} = \frac{\partial \varphi(X, Y, Z)}{\partial Z}, \end{array} \right.$$

X, Y, Z étant les composantes de la *réaction* au contact à l'instant t .

3. Les formules (4) s'interprètent immédiatement comme dans le cas du problème plan.

Soit M le point de coordonnées U, V, W par rapport aux axes choisis; il décrit, pendant le choc, une courbe (M) partant du point $M_0(U_0, V_0, W_0)$ pour aboutir en $M_1(U_1, V_1, W_1)$. Envisageons l'ellipsoïde d'équation

$$\varphi(x, y, z) = 1 \quad (1).$$

La demi-droite qui porte la réaction X, Y, Z à l'instant t le rencontre en P et le point O se projette orthogonalement en R sur le plan tangent en P à l'ellipsoïde. D'après les formules (4) :

La demi-droite OR est, à chaque instant, parallèle à la tangente à la courbe (M) et donne le sens dans lequel cette courbe est décrite par le point M.

(1) On vérifiera facilement que l'un des axes de cet ellipsoïde est porté par la droite OG.

Nous choisissons, une fois pour toutes, le sens de déplacement du point M pour sens *positif* sur la courbe (M) . Nous pouvons alors dire que :

1. *La demi-droite OR définit, à chaque instant, en direction et sens, la demi-tangente positive à (M) .*

4. Le problème posé se présente alors de la façon suivante :

A l'instant t_0 où commence le choc on connaît les vitesses et, en particulier, U_0, V_0, W_0 (¹) : on connaît donc le point de départ M_0 de la courbe (M) . Nous vérifierons dans la suite que *cette courbe est alors bien déterminée* si l'on admet les lois classiques du frottement et suppose connu le coefficient de frottement.

Le choc sera terminé lorsque, sur cette courbe, on arrivera au point M_1 de cote

$$W_1 = -eW_0,$$

e étant le coefficient de restitution (connu).

Ce point M_1 , dont nous aurons à vérifier l'existence, étant déterminé, le problème est résolu. U_1, V_1, W_1 sont connus; les formules (3) déterminent alors la percussion et les formules (1) et (2) l'état final des vitesses.

5. Avant d'aller plus loin il faut préciser comment est définie la courbe (M) et en examiner sommairement l'allure.

(¹) W_0 étant négatif.

Pour cette étude, nous nous plaçons dans le cas où la vitesse de glissement n'est pas nulle pendant le choc (ou pendant une partie du choc que nous envisageons); $U^2 + V^2$ est donc différent de zéro ou, géométriquement, le point M n'appartient pas à l'axe Oz .

Dans ces conditions, la position du point M détermine celle du point P puisque, d'après les lois du frottement, P doit être dans le plan zOM , OP faisant avec Oz l'angle de frottement du côté opposé à M . Le point R en résulte et les paramètres directeurs de la droite OR s'exprimeront à l'aide des coordonnées de M .

Les diverses courbes (M) possibles (qui correspondront à diverses valeurs des vitesses initiales) sont donc déterminées par un système d'équations différentielles. Pour écrire ces équations, les coordonnées cylindriques sont très indiquées: ρ, ω, z étant les coordonnées cylindriques de M (z n'est autre que W), on a le système

$$(5) \quad \frac{d\rho}{R(\omega)} = \frac{\rho d\omega}{\Theta(\omega)} = \frac{dz}{z(\omega)},$$

les dénominateurs étant les composantes de OR suivant le rayon vecteur, la perpendiculaire à Oz et au rayon vecteur, l'axe Oz . Il serait aisé d'expliciter ces dénominateurs, mais nous n'en avons pas besoin pour la suite.

Les courbes (M) définies par (5) forment une *congruence* et par un point $M_0(\rho_0 \neq 0, \omega_0, z_0)$, non situé sur Oz , passe une seule de ces courbes (¹). Si $\Theta(\omega_0)$ est nul, les relations (5) montrent que ω restera cons-

(¹) Pour en être certain, il suffit de noter que la tangente à une courbe (M) est toujours bien déterminée par la position de son point de contact M et en dépend d'une façon continue.

tant et que le point M se déplacera sur une droite, le point P restant fixe; c'est d'ailleurs évident géométriquement parce que la condition

$$\mathcal{O}(\omega_0) = 0$$

exprime que la position initiale de OR, OR₀ est dans le plan zOM₀, la courbe (M) étant alors nécessairement la parallèle à OR₀ menée par M₀. Si, au contraire, $\mathcal{O}(\omega_0)$ n'est pas nul, on prendra dans les équations (5) ω pour paramètre et l'intégration sera ramenée aux quadratures

$$\rho = \rho_0 e^{\int_{\omega_0}^{\omega} \frac{R(\omega)}{\mathcal{O}(\omega)} d\omega}, \quad z = z_0 + \int_{\omega_0}^{\omega} \rho \frac{Z(\omega)}{\mathcal{O}(\omega)} d\omega.$$

La courbe (M), ainsi déterminée, est décrite dans un sens (indiqué par OR) tel que

$$\frac{d\omega}{\mathcal{O}(\omega)}$$

soit positif. Elle reste régulière et ne rencontre pas Oz tant que ω n'atteint pas une valeur qui annule $\mathcal{O}(\omega)$.

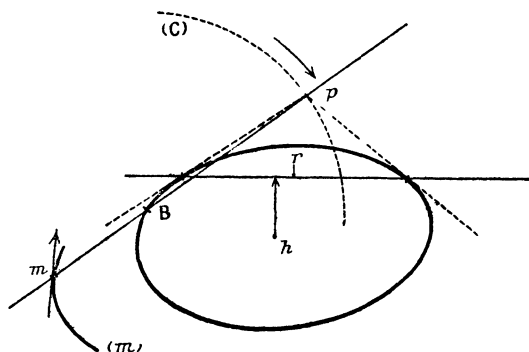
6. Ces valeurs remarquables de ω peuvent être définies géométriquement.

Pour y arriver nous envisagerons les projections (*m*) des courbes (M) sur un plan perpendiculaire à Oz; pour fixer les idées, ce sera le plan passant par le point B où la partie positive de l'axe Oz rencontre l'ellipsoïde. Ce plan (*plan de figure*) coupe l'ellipsoïde suivant une ellipse (E) dont le centre *h* est à l'intersection du plan et de la droite qui joint l'origine au point le plus haut H de l'ellipsoïde (1).

(1) Point *le plus haut*, c'est-à-dire dont la cote *z* est maximum.

La demi-droite OP coupe le plan de figure en p (1), le point M s'y projette orthogonalement en m .

Fig 1.



D'après ce qui précède, on peut énoncer les résultats suivants :

II. Pendant le choc, le point p restera sur le cercle (C), de centre B, qui constitue l'intersection du plan de figure et du cône de frottement; les points m et p sont constamment en ligne droite avec B et sont de part et d'autre de ce point.

III. La demi-tangente positive en m a la courbe (m) correspondante a même direction et même sens que la perpendiculaire hr abaissée de h sur la polaire

Il nous arrivera ainsi plusieurs fois par la suite de parler comme si l'axe des z était vertical et dirige vers le haut, peu importe évidemment, l'orientation de cet axe ne jouant aucun rôle dans la question.

(1) Il n'est pas inutile de noter que, la réaction normale étant toujours positive, le point P est sur le demi-ellipsoïde situé, par rapport à xOy , du côté des z positifs. La position de p détermine entièrement P.

de p par rapport à (E) ⁽¹⁾. Par un point m , distinct de B, passe une seule (m) ⁽²⁾.

Une racine de $\mathcal{O}(\omega)$ correspond évidemment à un point p tel que hr soit parallèle à la droite mBp . Cette dernière droite étant alors perpendiculaire à la polaire de p , le point p appartient à l'hyperbole d'Apollonius relative à B et à (E). Cette hyperbole passe par B et h et l'on vérifie que :

IV. Lorsque p décrit l'hyperbole, la droite hr a le sens Bm ou le sens Bp suivant que p appartient ou non à l'arc d'hyperbole Bh ⁽³⁾.

Le cercle (C), dont le rayon est proportionnel au coefficient de frottement, coupe l'hyperbole en deux ou quatre points suivant la valeur de ce coefficient. Nous appellerons ces points *points limites*. Ils correspondent aux racines (deux ou quatre) de l'équation

$$\mathcal{O}(\omega) = 0.$$

Sur la figure nous avons représenté deux cercles (C): l'un en trait pointillé donnant deux points limites p' et p'' , l'autre en trait mixte correspondant à une valeur

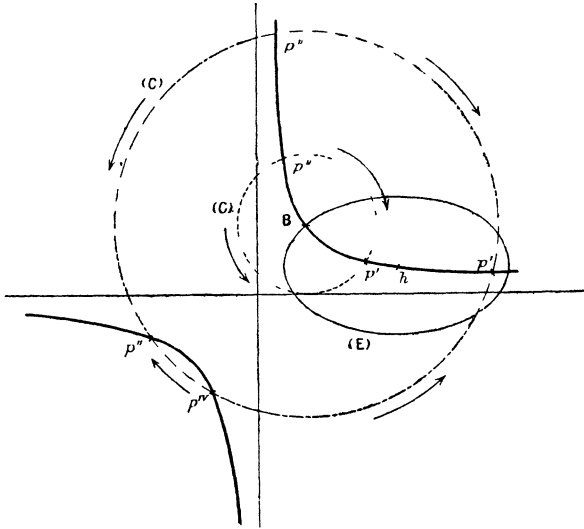
(1) Les deux premières relations (4) entraînent évidemment que la demi-tangente à (m) dans le sens de parcours soit donnée, en sens et direction, par la normale extérieure en p à l'ellipse, homothétique et concentrique à (E), passant par ce point. C'est un énoncé équivalent à celui du texte.

(2) Cf. note (1) de la page 221 et aussi paragraphe 9.

(3) L'arc d'hyperbole à envisager est bien Bh puisque le sens Bp change au passage par le point B, tandis que, au passage par le point h , c'est le sens hr qui se modifie. D'autre part, quand p décrit l'arc Bh, l'angle \widehat{Bph} reste obtus et la demi-droite hr , qui fait un angle aigu avec hp , a donc même sens que Bm; ce sera nécessairement l'inverse quand p n'appartient pas à l'arc Bh.

plus grande du coefficient de frottement et donnant quatre points limites p' , p'' , p''' , p^{IV} .

Fig. 2.



7. Admettons que le glissement initial soit tel que p_0 , position initiale de p , coïncide avec l'un des points limites : m se déplacera sur le prolongement de $p_0 B$ et, d'après IV :

m s'éloigne de B lorsque p_0 coïncide avec un point limite appartenant à l'arc d'hyperbole Bh, il s'en rapproche sinon.

Revenons au point M. Il décrit, comme nous l'avons déjà vu, une demi-droite à partir de sa position initiale M_0 . Ce que nous venons de dire du point m montre que le déplacement du point M finira par l'amener sur Oz (glissement nul) sauf si le point limite appartient à l'arc Bh (1). Dans ce dernier cas le point P_0 de

l'ellipsoïde (correspondant à p_0) est nécessairement au-dessus du plan de contour apparent horizontal de cet ellipsoïde (²). OR_0 qui donne le sens et la direction de la droite (M) est donc au-dessus de xOy .

Résumant les résultats précédents nous pouvons dire que :

V. Lorsque p_0 coïncide avec l'un des points limites, la trajectoire (M) (qui est une demi-droite) rencontre l'axe des z ou s'élève indéfiniment au-dessus du plan des xy .

8. Plaçons-nous maintenant dans le cas où p_0 n'est pas confondu avec l'un des points limites. Lorsque m décrit la courbe (m), la droite Bm tournera autour de B dans un sens défini par hr ; le point p correspondant décrira donc un arc du cercle (C) en se déplaçant toujours dans le même sens jusqu'à atteindre un point limite.

Le sens du déplacement du point p est facile à déterminer en construisant hr pour une position particulière de p . Il est marqué par des flèches sur la figure : dans le cas de deux points limites (cercle en trait pointillé) il est tel que p tende vers le point p' ; dans le cas de

(¹) Nous ne nous préoccupons pas ici du fait que, dans le problème réel de choc, la courbe (M) doit être limitée au point M_1 de cote connue $-eW_0$; nous étudions en somme, jusqu'au paragraphe 10, les courbes (M) et (m) comme définies, ainsi que leur sens de parcours, par les relations différentielles indiquées ou par les propriétés géométriques équivalentes. Nous revenons, au paragraphe 10, pour la discussion générale, au problème de choc.

(²) Contour apparent correspondant à la direction Oz . Les points B et H de l'ellipsoïde sont au-dessus de ce plan de contour apparent; d'autre part, le même plan a pour trace sur le plan de figure une droite parallèle à la normale en B à l'hyperbole, cette droite ne peut rencontrer l'arc Bh . L'énoncé du texte est ainsi justifié.

quatre points limites (cercle en trait mixte) p tend vers p' ou p''' suivant qu'il appartient à l'un des arcs $p'' p' p''$ ou $p'' p''' p''$.

Reste à examiner l'allure de la courbe (M) lorsque p tend ainsi vers un point limite (p' ou p'''). Le résultat est intuitif : la demi-tangente positive à une courbe (M) dépend d'une façon continue de la position du point P qui correspond à son point de contact ; la courbe (M) se rapprochera donc de celle que l'on obtiendrait pour p coïncidant avec p' ou p''' . On est ainsi conduit aux énoncés suivants :

VI. Lorsque p tend vers un point limite p' ou p''' , le point M tend vers un point de l'axe Oz pourvu que ce point limite n'appartienne pas à l'arc Bh.

VII. Lorsque p tend vers un point limite p' appartenant à l'arc Bh, le point M s'éloigne indéfiniment, sa cote tendant vers $+\infty$.

Justifions d'abord l'énoncé VI. Lorsque p tend vers le point limite, la demi-tangente à (m) tend à prendre, d'après IV, le sens *opposé* au rayon vecteur Bm. Ce rayon vecteur finira donc par aller en diminuant : il aura une limite qui ne peut être différente de zéro car le point m tendrait alors vers une position limite m' et il passerait par m' deux courbes (m) : celle que nous envisageons et la droite Bm'. C'est impossible d'après III. La courbe (m) aboutit donc au point B. Son arc s est fini puisque la tangente est continue.

Revenons à la courbe (M). $\frac{dz}{ds}$, pente de sa tangente par rapport au plan xOy , tend vers une limite finie, à savoir la pente de la droite OR construite à partir du point limite. z reste donc fini et le point M tend vers un point M' de l'axe Oz.

On démontrera, d'une façon analogue, le théorème VII : le rayon vecteur finit par augmenter et le point m s'éloigne indéfiniment ; $\frac{dz}{ds}$ ayant une limite positive, la cote z du point M tend vers $+\infty$.

9. Les raisonnements précédents laissent de côté le cas intermédiaire où le cercle (C) passe par h . Le point p' est alors en h et il faut examiner à part l'allure de (M) lorsque p tend vers h .

La remarque, fondamentale dans ce qui précède, que la tangente à la trajectoire de m est bien déterminée par la position de ce point (distinct de B) paraît en défaut lorsque, m étant sur le prolongement Bh' de hB , le point p est en h . Mais, en suivant par continuité le déplacement de p sur le cercle, on voit qu'à un point m ainsi situé correspondra, pour tangente, la perpendiculaire au diamètre conjugué [par rapport à (E)] de la tangente en h à (C). Les courbes (m) sont donc régulières au voisinage des points de Bh' ; c'est seulement le sens de parcours qui diffère des deux côtés de Bh' .

Si donc, dans le cas envisagé dans ce paragraphe, on suppose que p tende vers h , la trajectoire de m aboutit à un point m' (distinct de B) de la demi-droite Bh' . Mais la courbe (M) s'élève indéfiniment : en effet, la tangente à cette courbe tend à devenir parallèle (et de même sens) à la droite OR correspondant au point H; cette droite a même sens et direction que la partie positive de Oz .

$$\frac{dz}{ds}$$

tend donc vers $+\infty$ et, comme s reste fini, z tend vers $+\infty$.

On voit que dans tous les cas, et ce sera fondamental pour la suite, on a le théorème suivant :

VIII. *Si l'on suit une trajectoire (M) correspondant à un glissement initial non nul, on arrive en un point de l'axe Oz (glissement nul), à moins que la trajectoire ne s'élève indéfiniment dans le sens des z positifs.*

10. La discussion générale sera maintenant très simple.

Admettons d'abord qu'à l'instant initial *il n'y ait pas de glissement* : M_0 est un point de l'axe Oz et l'on a le choix entre deux hypothèses :

a. Pas de glissement pendant le choc. — Le point M se déplace sur l'axe des z dans le sens positif et le point M_1 y est déterminé par sa cote. Le point P est fixe en H, point le plus haut de l'ellipsoïde. La solution obtenue ainsi convient donc si l'angle zOH est inférieur ou égal à l'angle de frottement.

b. Un glissement s'établit pendant le choc. — Le glissement initial devant être *opposé* à la composante tangentielle de la réaction initiale, il faut que le point p soit, au début du choc, en l'un des points limites et il faut que ce point limite p' appartienne à l'arc d'hyperbole Bh pour que (IV) le sens de déplacement correspondant soit opposé à Bp.

Le point p restera d'ailleurs en p' dans la suite du choc puisque, s'il se déplaçait sur le cercle (C), le sens de son déplacement (flèches de la figure) ne pourrait que le ramener au point p' . La courbe (M) sera donc une demi-droite s'écartant de Oz et s'élevant du côté des z positifs. Sur cette droite on fixera sans difficulté le point M_1 .

La solution ainsi obtenue convient si le point H est extérieur au cône de frottement (1) de sorte que les hypothèses a et b s'excluent.

11. Supposons maintenant qu'il y ait glissement à l'instant initial. Si sur la courbe (M) , déterminée comme nous l'avons vu au paragraphe 5, on peut trouver le point M_1 de cote $-eW_0$, il n'y a nulle difficulté. Sinon, d'après le résultat VIII, en suivant cette courbe on arrivera nécessairement à l'axe Oz . Il faut donc diviser le choc en deux périodes : la première amène à une position M' du point M pour laquelle le glissement s'annule; on se trouve alors dans les conditions du paragraphe précédent et l'on aura *glissement* ou *non-glissement* suivant la valeur du coefficient de frottement.

12. Dans tous les cas, comme on vient de le voir, la solution de la question de choc posée sera unique et bien déterminée.

Le cas particulier où l'ellipsoïde φ a un plan de symétrie passant par Oz se présentera souvent en pratique : le point B est alors un des sommets de l'ellipse (E) et l'hyperbole d'Apollonius se réduit à l'axe correspondant et à une droite perpendiculaire. Il n'y a rien d'essentiel à changer, par ailleurs, à l'analyse précédente.

Il y aurait, au contraire, quelques modifications à faire aux raisonnements précédents pour les appliquer aux cas où Oz est un des axes de l'ellipsoïde φ (B coïncidant avec H). Mais ces modifications sont très évidentes et il n'y a pas lieu d'y insister.

(1) Puisque le point limite p' doit être sur l'arc d'hyperbole Bh .

Nous n'insisterons pas non plus sur l'étude du choc (avec un seul point de contact) de deux solides (S) et (S') tous deux libres. On procédera comme au paragraphe 8 de notre précédent article, pour le cas de deux plaques libres et il n'y aura rien à changer à la théorie précédente que la définition de l'ellipsoïde φ .