Nouvelles annales de mathématiques

E. Lainé

Sur les transformations de contact

Nouvelles annales de mathématiques 5e série, tome 2 (1923), p. 177-185

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1923_5_2__177_1>

[P¹6e]

SUR LES TRANSFORMATIONS DE CONTACT

(*Suite*) [1];

PAR E. LAINÉ.

9. Sophus Lie a indiqué [2] une représentation géométrique très propre à faire saisir le caractère exceptionnel de l'intégrale singulière. Considérons p comme une troisième coordonnée ponctuelle; pour fixer les idées, nous prendrons l'axe des p perpendiculaire au plan (x, y) supposé horizontal.

(¹) Cf. *N. A.*, janvier 1924, p. 131.
(²) Cf. *Op. cit.*, Kap. 6.

A tout élément (x, y, p) correspond ainsi un point de l'espace ; à toute $m_1^0(x_0, y_0, p)$, la verticale du point (x_0, y_0). A toute m_1^1 correspond une courbe et une seule, mais inversement à toute courbe de l'espace (x, y, p) ne correspond pas une m_1. Les seules courbes auxquelles corresponde une m_1 sont celles qui vérifient l'équation de Pfaff

$$dy - p\,dx = 0:$$

nous les appellerons « courbes de Pfaff ». Toute verticale est donc une courbe de Pfaff.

A deux m_1 tangentes, *i. e.* ayant un élément commun, correspondent deux courbes de Pfaff ayant un point commun Mais ces courbes ne sont pas en général tangentes en ce point ; elles ne le seraient que si les m_1 considérées avaient deux éléments communs infiniment voisins, *i. e.* étaient osculatrices.

En un point d'une courbe de Pfaff la tangente est dans le plan de coefficients directeurs $(p, -1, 0)$, c'est-à-dire dans un plan vertical dont la trace sur le plan (x, y) est précisément la droite de coefficient angulaire p.

Donnons-nous un cylindre quelconque à génératrices verticales ; il détermine dans le plan xy une m_1^1, et comme à cette m_1^1 correspond une courbe de Pfaff et une seule, il en résulte que, sur tout cylindre à génératrices verticales, il existe, en dehors des génératrices, une courbe de Pfaff et une seule ; nous l'appellerons la « caractéristique du cylindre ».

A l'équation différentielle

$$(5) \qquad f(x, y, p) = 0$$

correspond une surface S. D'ailleurs à chaque courbe de Pfaff tracée sur S correspond évidemment, par projection sur le plan (x, y), une m_1 intégrale de l'équation (5) et inversement. Par exemple, si l'équation (5) ne dépend pas de p, la surface S est un cylindre à génératrices verticales, qui coupe le plan des (x, y) suivant la courbe (C) représentée alors par l'équation (5). Les génératrices sont des courbes de Pfaff auxquelles correspondent les m_1^0 intégrales ayant pour supports ponctuels les différents points de (C) (intégrale générale); d'autre part, à la caractéristique du cylindre correspond la m_1^1 ayant pour support ponctuel la courbe (C) elle-même (intégrale singulière).

Si nous prenons arbitrairement, dans le plan des xy, une famille de courbes à un paramètre, ces courbes auront en général une enveloppe. L'équation différentielle dont elles donnent l'intégrale générale représente alors une surface S qui possède une propriété particulière. En effet, considérons un élément quelconque de l'enveloppe; cet élément appartient aussi à une autre courbe de la famille. Les deux courbes de Pfaff correspondantes auront un point commun M, mais ne seront pas en général, nous l'avons vu, tangentes en ce point. Les tangentes en M à ces deux courbes devant être dans un même plan vertical, le plan tangent en M à S est vertical. Ainsi le cylindre à génératrices verticales déterminé par l'enveloppe touche la surface S tout le long d'une courbe de Pfaff; autrement dit, la courbe de contact de S et du cylindre circonscrit à génératrices verticales est la caractéristique du cylindre.

Il est clair qu'une surface S prise au hasard ne possède pas cette propriété, puisque sur tout cylindre à génératrices verticales il existe une seule caractéristique. Il en résulte qu'une équation différentielle n'admet pas, en général, d'intégrale singulière.

On verrait sans difficulté que la courbe de contact de S et du cylindre circonscrit à génératrices verticales, soit (Γ), se projette sur le plan des (x, y) suivant la courbe lieu des points de rebroussement des courbes intégrales. Cette courbe (Γ) est définie par les équations

$$F(x, y, p) = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial p} = 0;$$

on en déduit, suivant un procédé connu, la condition qui exprime que l'équation (5) admet une intégrale singulière.

Si la courbe Γ est une verticale, il lui correspond une intégrale singulière m_1^0. Pour qu'il y ait une intégrale singulière du type ($\mathcal{C}_0$), il suffit que toutes les courbes de Pfaff tracées sur la surface S aient un point commun.

9'. Le procédé employé au n° 7 pour intégrer l'équation différentielle

$$(5) \qquad f(x, y, p) = 0$$

peut être généralisé. Au lieu de ramener cette équation à une forme immédiatement intégrable

$$Y = 0,$$

supposons qu'on lui ait appliqué une T. C. qui la ramène à la forme

$$(14) \qquad F(X, Y, P) = 0;$$

si l'on sait intégrer l'équation (14), on saura, d'après ce qui a été dit au n° 6, intégrer également l'équation (5).

Tel est, sous sa forme la plus générale, le mode d'application de la théorie des T. C. au problème de l'intégration des équations différentielles du premier ordre.

Remarques. — I. Nous ne nous occupons dans cette Note que des transformations finies. La théorie des transformations infinitésimales nécessiterait des développements beaucoup plus longs ([1]).

II. Toute équation

$$(e_1) \qquad f(x, y, p) = 0$$

peut se ramener par une T. C. à l'équation

$$(E) \qquad Y = 0;$$

désignons par U cette T. C. La T. C. inverse U^{-1} conduit de (E) à (e_1). Soit

$$(e_2) \qquad \varphi(x, y, p) = 0$$

une autre équation quelconque; il existe une T. C., soit V, telle que V^{-1} conduise de (E) à (e_2). Le résultat de deux T. C. successives étant encore une T. C., on a ainsi une T. C, UV^{-1}, qui permet de passer de (e_1) à (e_2). Donc étant données deux équations différentielles quelconques du premier ordre, on peut toujours passer de l'une à l'autre par une T. C. convenablement choisie. Autrement dit, une équation différentielle du premier ordre n'a pas d'invariants par rapport au groupe des T. C.

10. Considérons une multiplicité m_1 du plan xy, et à chaque élément (x, y, p) associons une nouvelle variable r telle que, quand on se déplace sur m_1, on ait

$$dp - r\,dx = 0.$$

([1]) *Cf.* Vivanti, *Leçons élémentaires de la théorie des groupes de transformations*. Cet Ouvrage est un résumé des travaux de Sophus Lie sur la théorie des groupes. — *Cf.* aussi Goursat, *Cours d'Analyse*, t. II, Chap. XIX.

On pourra alors définir la multiplicité m_1 par trois relations entre les variables x, y, p, r entraînant les équations

$$(15) \qquad dy - p\,dx = 0, \qquad dp - r\,dx = 0.$$

C'est le sens que nous donnerons désormais au mot « multiplicité ».

Revenons maintenant aux équations (6) qui définissent une T. C. Pour qu'à toute m_1 du plan (x, y) corresponde une M_1 du plan (X, Y), il faut ajouter aux équations (6) une équation nouvelle qui sera

$$R = \frac{P_x + p P_y + r P_p}{X_x + p X_y + r X_p};$$

les équations (15) entraînent alors en effet

$$dP - R\,dX = 0.$$

Les équations

$$(16) \quad \left\{ \begin{array}{l} X = X(x, y, p), \qquad Y = Y(x, y, p), \qquad P = P(x, y, p), \\ \qquad\qquad R = \dfrac{P_x + p P_y + r P_p}{X_x + p X_y + r X_p}, \end{array} \right.$$

dont les trois premières ont pour conséquence

$$dy - p\,dx = 0,$$

définissent une T. C. prolongée.

Ceci posé, une équation telle que

$$(17) \qquad F(x, y, p, r) = 0$$

peut évidemment être considérée comme une équation différentielle du second ordre; intégrer cette équation revient à chercher toutes les m_1 qui la vérifient.

Soit alors

$$(18) \qquad U(x, y, a, b) = 0$$

une famille de ∞^2 courbes, représentant l'intégrale générale de (17). Donnons à la constante arbitraire a, dans l'équation (18), une valeur particulière a_0 ; l'équation

$$U(x, y, a_0, b) = 0$$

représente ∞^1 courbes intégrales, qui forment l'intégrale générale d'une équation différentielle

$$X(x, y, p) = a_0.$$

De même l'équation obtenue en donnant à b, dans l'équation (18), une valeur particulière b_0

$$U(x, y, a, b_0) = 0,$$

représente ∞^1 courbes intégrales, qui forment l'intégrale générale d'une équation différentielle

$$Y(x, y, p) = b_0.$$

En résumé, sur une m_1 intégrale quelconque de (17), on a à la fois

$$X(x, y, p) = a, \qquad Y(x, y, p) = b.$$

Ces deux équations devant définir une m_1 quelles que soient les constantes a et b, il en résulte (n° 2) que les fonctions X et Y sont en involution.

On appelle intégrale intermédiaire de (17) toute fonction $\Phi(x, y, p)$ telle que toute intégrale de (17) vérifie l'équation

$$\Phi(x, y, p) = \text{const.}$$

et réciproquement. X et Y sont donc des intégrales intermédiaires, et l'intégrale intermédiaire la plus générale s'écrit

$$\Phi(x, y, p) \equiv F(XY),$$

F désignant une fonction arbitraire.

Géométriquement, on voit que l'équation différentielle (17) définit ∞^2 courbes intégrales, que l'on peut, d'une infinité de manières, grouper de façon à obtenir ∞^1 familles à un paramètre. A chacun de ces groupements correspond une intégrale intermediaire.

Soit $\Phi(x, y, p)$ une intégrale intermédiaire quelconque. Il faut noter qu'en général les intégrales singulières, s'il en existe, des équations differentielles

$$\Phi(x, y, p) = \text{const.}$$

ne seront pas des intégrales de l'équation (17). En effet, soient

$$(19) \qquad x = \theta_1(\lambda), \qquad y = \theta_2(\lambda)$$

les équations paramétriques d'une courbe (C) arbitraire. On peut toujours déterminer $\varphi(a)$ de telle sorte qu'en remplaçant b par $\varphi(a)$ dans l'équation (18), la famille à un paramètre

$$U[x, y, a, \varphi(a)] = 0$$

ait précisément pour enveloppe la courbe (C) : il suffit pour cela que les équations

$$U[x, y, a, \varphi(a)] = 0, \qquad \frac{\partial U}{\partial a} + \frac{\partial U}{\partial b}\varphi'(a) = 0$$

soient identiquement vérifiées quand on y remplace x et y par leurs valeurs (19). On en déduit, par un raisonnement classique, que φ est déterminé par l'élimination de λ entre les équations

$$V = 0, \qquad \frac{\partial V}{\partial \lambda} = 0,$$

où l'on a posé

$$V = U[\theta_1(\lambda), \theta_2(\lambda), a, \varphi(a)].$$

Mais la famille considérée est évidemment l'intégrale générale de l'équation

$$Y - \varphi(X) = 0;$$

l'intégrale singulière de cette équation, qui n'est autre que la courbe arbitraire (C), ne sera évidemment pas, en général, une intégrale de (17).

Considérons maintenant l'équation (17) mise sous la forme

$$(20) \qquad r = \varpi(x, y, p).$$

Toute intégrale de l'équation homogène

$$(21) \qquad \frac{\partial F}{\partial x} + p\frac{\partial F}{\partial y} + \varpi(x, y, p)\frac{\partial F}{\partial p} = 0$$

est, comme on le voit sans difficulté, une intégrale intermédiaire de l'équation (20). Par conséquent si l'on prend pour la fonction P une intégrale quelconque de (21), la T. C. prolongée définie par les équations (16) ramène l'équation (21) à la forme

$$(22) \qquad R = 0.$$

L'équation (22) a pour intégrale générale la famille de droites

$$Y = aX + b.$$

En éliminant p entre les équations

$$Y(x, y, p) - aX(x, y, p) = b, \qquad P(x, y, p) = a,$$

on aura l'intégrale générale de l'équation (17).

(*A suivre.*)