NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

N. ABRAMESCO

Résumé des principales propriétés des polynômes orthogonaux

Nouvelles annales de mathématiques 5e série, tome 2 (1923), p. 166-177

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1923_5_2__166_1>

[D1bζ]

RÉSUMÉ DES PRINCIPALES PROPRIÉTÉS DES POLYNOMES ORTHOGONAUX (*);

Par N. ABRAMESCO.

Les solutions de quelques anciennes questions non

(¹) On a, en effet,

$$I\left(\frac{f}{g}\right) + I\left(\frac{g}{f}\right) = \varepsilon, \qquad I\left(\frac{f}{g}\right) = \text{indice de } \frac{f}{g},$$

$$S\left(\frac{f}{g}\right) + S\left(\frac{g}{f}\right) = 0, \qquad S\left(\frac{f}{g}\right) = \left\{\begin{array}{l}\text{signature de la forme}\\ \text{quadratique } f.\,g.\end{array}\right.$$

$$S\left(\frac{g}{f}\right) = I\left(\frac{g}{f}\right).$$

Donc

$$I\left(\frac{f}{g}\right) = S\left(\frac{f}{g}\right) + \varepsilon;$$

or, ε est égal à o ou à ± 1. Il est égal à o si $\frac{f}{g}$ a le même signe aux deux limites de l'intervalle $-\infty, +\infty$.

Ce signe est celui de $(-1)^p k$, k étant le rapport des coefficients des termes de plus haut degré de f et g pour $x = -\infty$, de k pour $x = \infty$.

Il faut donc, pour que $\varepsilon = 0$, que $(-1)^p > 0$: p pair.

(*) *Voir* pour la bibliographie : (¹) *Encyclopédie des Sciences* résolues des *Nouvelles Annales de Mathématiques* étant liées avec la théorie des polynomes orthogonaux, et comme ces polynomes ont une grande importance dans la représentation des fonctions par des séries de

---

mathématiques, t. II, vol. V, fasc. 2; P. APPELL et A. LAMBERT, *Généralisations diverses des fonctions sphériques*.

(2) CHRISTOFFEL, *Sur une classe particulière de fonctions entières et de fractions continues* (*Annali di Matematica pura ed applicata*, 1877, p. 1-10).

(3) HEINE, *Handbuch der Kugelfunktionen* (2e édition, Berlin, 1878).

(4) DARBOUX, *Mémoire sur l'approximation des fonctions de très grands nombres et sur une classe étendue de développements en série* (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 1878, p. 411).

(5) STIELTJES, *Quelques recherches sur la théorie des quadratures dites mécaniques* (*Annales scientifiques de l'École Normale supérieure*, 1884, p. 409).

(6) PICARD, *Cours d'Analyse supérieure* fait à la Sorbonne en 1912, 1918.

(7) KAMPÉ DE FERIET, *Thèse*, 1915.

(8) A. ANGELESCO, *Sur les polynomes généralisant les polynomes de Legendre et Hermite* (*Thèse*, 1916).

(9) SZEGÖ, *A Hankel-féle formákról* (Les formes de Hankel) (*Mathematikai és Termeszéttudományi ertesitò*, 1918, p. 497).

(10) N. ABRAMESCO, *Sulle serie di polinomi di una variabile complessa* (*Annali di Matematica pura ed applicata*, 1922, p. 497).

(11) N. ABRAMESCO, *Sur les séries de polynomes a une variable complexe* (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 1922, p. 77).

(12) SZEGÖ, *Ueber die Entwickelung einer analytischen Function nach den Polynomen eines orthogonalsystem* (*Mathematische Annalen*, Bd 82, p. 188).

(13) POINCARE. *Sur les équations linéaires aux différentielles ordinaires et aux différences finies* (*American Journal*, vol. VII, 1885).

(14) C. POSSÉ, *Sur quelques applications des fractions continues algébriques*, Saint-Pétersbourg, 1886.

(15) A. ANGELESCO, *Sur les quadratures mécaniques* (*Bulletin de la Section scientifique de l'Académie roumaine*, vol. VI 1920, p. 81).

polynomes, nous croyons qu'il ne sera pas sans intérêt de faire un résumé de leurs principales propriétés qui ont déjà été décrites dans divers Memoires.

1. Considérons une fonction $\varphi(x)$, positive et intégrable dans l'intervalle (a, b). Les polynomes $P_0(x)$, $P_1(x)$, ..., $P_n(x)$, ..., de degré égal à l'indice, qui vérifient les relations d'orthogonalité

$$(1)\quad \begin{cases} \int_a^b \varphi(x)\, P_m(x)\, P_n(x) = 0 & (m < n), \\ \int_a^b \varphi(x)\, P_n^2(x)\, dx = I_n = \text{const.}, \end{cases}$$

s'appellent *polynomes orthogonaux*.

La *propriété fondamentale* du polynome orthogonal

$$P_n(x) = c_{n,n}x^n + c_{n,n-1}x^{n-1} + \ldots + c_{n,0}$$

est de vérifier les égalites

$$\int_a^b \varphi(x)\, x^k\, P_n(x)\, dx = 0, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, (n-1),$$

ou

$$\begin{array}{l} c_{n,0}g_0 \;\;\, + c_{n,1}g_1 + \ldots + c_{n,n}g_n \;\;\;\;\;\, = 0, \\ c_{n,0}g_1 \;\;\, + c_{n,1}g_2 + \ldots + c_{n,n}g_{n+1} \;\, = 0, \\ \ldots \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_{n,0}g_{n-1} + c_{n,1}g_n + \ldots + c_{n,n}g_{2n-1} = 0, \end{array} \qquad g_s = \int_a^b \varphi(x) x^s\, dx,$$

d'où l'on peut déduire des valeurs proportionnelles pour $c_{n,0}$, ..., $c_{n,n}$.

2. *Le polynome* $P_n(x)$ *est unique, bien déterminé, complètement défini* à un facteur constant près, dont

la valeur est donnée par la seconde des relations (1),

$$\int_a^b \varphi(x)\,P_n^2(x)\,dx = I_n.$$

3. *Le polynome* $P_n(x)$ *peut s'écrire*

$$P_n(x) = \begin{vmatrix} g_0 & g_1 & \dots & g_n \\ g_1 & g_2 & \dots & g_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ g_{n-1} & g_n & \dots & g_{2n-1} \\ 1 & x & \dots & x^n \end{vmatrix}.$$

Prenant $c_{n,n} = 1$, on a [10]

$$I_n = \frac{D_n(\varphi)}{D_{n-1}(\varphi)}, \qquad P_n(x) = \frac{D_{n-1}(F)}{D_{n-1}(\varphi)}, \qquad F = (x-t)\,\varphi(t),$$

$$D_n(\varphi) = \begin{vmatrix} g_0 & g_1 & \dots & g_n \\ g_1 & g_2 & \dots & g_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ g_{n-1} & g_n & \dots & g_{2n-2} \end{vmatrix}, \qquad g_s = \int_a^b \varphi(t)\,t^s\,dt.$$

4. *Le polynome* $P_n(x)$ *peut se mettre sous la forme* [10]

$$P_n(x) = \frac{1}{(b-a)^n n!}\,\frac{1}{\varphi(x)}\,\frac{d^n}{dx^n}[(x-a)^n (x-b)^n \psi_n(x)],$$

$\psi_n(x)$ étant une fonction finie pour $x = a$, $x = b$.

5. *L'équation* $P_n(x) = 0$ *a toutes ses racines* [10] *réelles, distinctes et comprises dans l'intervalle* (a, b).

6. Supposons que $\psi_n(x)$ reste la même [10] pour tous les polynomes $P_n(x)$ et soit $\psi(x)$ sa valeur. $P_n(x)$ *est le coefficient du* t^n *dans le développement en*

série de t de l'expression $\frac{\psi(z)}{\varphi(x)}\frac{\partial z}{\partial x}$, z étant la racine de l'équation

$$z = x + t\,\frac{(z-a)(z-b)}{b-a}, \qquad z = x, \qquad t = 0,$$

qui peut se développer avec la formule de Lagrange. Cette expression est une fonction génératrice pour les polynomes $P_n(x)$.

Cas particuliers : 1° $\varphi(x) = \psi_n(x) = 1$, $a = -1$, $b = 1$;

$$z = x - \frac{t}{2}(z^2 - 1), \qquad z = x, \qquad t = 0; \qquad z = \frac{1-\sqrt{1-2tx+t^2}}{t},$$

$$\frac{\psi(z)}{\varphi(z)}\frac{dz}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-2tx+t^2}} = \Sigma\, t^n P_n(x),$$

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}[(x^2-1)^n],$$

$$P_n(x) = \frac{2n(2n-1)\ldots(n+1)}{2^n n!}$$
$$\times\left[x^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)}x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2(2n-1)(2n-3)}x^{n-4} - \ldots\right],$$

et $P_n(x)$ est le polynome de Legendre.

2° $\varphi(x) = \psi_n(x) = (1-x)^\lambda(1-x)^\mu$, $\lambda + 1 > 0$, $\mu + 1 > 0$, $a = -1$, $b = 1$;

$$z = x + \frac{t}{2}(1 - z^2), \qquad z = \frac{1}{t}\left(-1 + \sqrt{1+2tx+t^2}\right),$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{1+2tx+t^2}},$$

$$\frac{\psi(z)}{\varphi(x)}\frac{\partial z}{\partial x} = 2^{\lambda+\mu}\left(1 + t + \sqrt{1+2tx+t^2}\right)^{-\lambda}$$
$$\times\left(1 - t + \sqrt{1+2tx+t^2}\right)^{-\mu}(1+2tx+t^2)^{-\frac{1}{2}},$$

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}(1-x)^{-\lambda}(1+x)^{-\mu}\frac{d^n}{dx^n}[(1-x)^{n+\lambda}(1+x)^{n+\mu}],$$

$P_n(x)$ étant le polynome de Jacobi et l'on a, observant (1),

$$\int_{-1}^{+1} (1-x)^{\lambda}(1+\mu)^{\mu} P_m(x) P_n(x)\, dx = 0 \qquad (m \lessgtr n).$$

7. *Si* $\varphi(x) = \psi_n(x) = (x-a)^{\lambda}(x-b)^{\mu}$, $\lambda + 1 > 0$, $\mu + 1 > 0$, *le polynome* $P_n(x)$ *de Jacobi vérifie l'équation différentielle* (10)

$$(x-a)(x-b)\frac{d^2y}{dx^2} + [(2+\lambda+\mu)x - a(\mu+1) - b(\lambda+1)]\frac{dy}{dx} - n(n+1+\lambda+\mu)y = 0,$$

dont l'autre solution est

$$\frac{1}{(b-a)^n n!}(x-a)^{-\lambda}(x-b)^{-\mu} \times \int_a^b (t-a)^{n+\lambda}(t-b)^{n+\mu}(t-x)^{-n-1}\, dt.$$

Cas particuliers : 1° $\varphi(x) = \psi_n(x) = 1$, $a = -1$, $b = 1$; le polynome de Legendre $P_n(x)$ vérifie l'équation différentielle

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + n(n+1)y = 0.$$

2° $\varphi(x) = \psi_n(x) = (x^2 - a^2)^l$, $l + 1 > 0$; le polynome

$$(2) \qquad P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}(x^2-a^2)^{-l}\frac{d^n}{dx^n}[(x^2-a^2)^{n+l}]$$

vérifie l'équation différentielle

$$(3) \quad (x^2-a^2)\frac{d^2y}{dx^2} + 2x(1+l)\frac{dy}{dx} - n(n+1+2l)y = 0.$$

Comme application, considérons *le problème* 1365 (*N. A.*, 1881, p. 381; 1917, p. 232) :

Démontrer que l'équation

$$(4)\quad x^{n-l} - \frac{(n-l)(n-l-1)}{2(2n-1)} a^2 x^{n-l-2} + \frac{(n-l)(n-l-1)(n-l-2)(n-l-3)}{2.4(2n-1)(2n-3)} a^4 x^{n-l-4} - \ldots = 0$$

a toutes ses racines réelles, inégales et comprises entre $-a$ *et* $+a$ (Escary).

En désignant $p = n - l$, le premier membre de cette équation est le polynome

$$P_p = x^p - \frac{p(p-1)}{2(2p+2l-1)} a^2 x^{p-2} + \frac{p(p-1)(p-2)(p-3)}{2(2p+2l-1)(2p+2l-3)} a^4 x^{p-4} - \ldots$$

qui vérifie l'équation différentielle (3) (où n est remplacé par p); donc on a

$$P_p = K(x^2 - a^2)^{-l} \frac{d^p}{dx^p}[(x^2 - a^2)^{p+l}] \qquad (K = \text{const.}),$$

et donc (§ 5) l'équation proposée $P_p = 0$ a toutes ses racines réelles, distinctes et comprises dans l'intervalle $(-a, +a)$.

Une autre application est *le problème* 1366 (*N. A.*, 1881, p. 381; 1917, p. 232) :

Démontrer que l'équation

$$(5)\quad x^{n-l} + \frac{(n-l)(n-l-1)}{2(2n-1)} a^2 x^{n-l-2} + \frac{(n-l)(n-l-1)(n-l-2)(n-l-3)}{2(2n-1)(2n-3)} a^4 x^{n-l-4} + \ldots = 0$$

a toutes ses racines imaginaires, inégales et comprises dans l'intérieur d'un cercle de rayon égal à a (Escary).

Remplaçant dans cette équation x par ix, on obtient l'équation (4) qui a toutes ses racines réelles, distinctes, dans l'intervalle $(-a, +a)$; donc l'équation (5) a toutes ses racines imaginaires, distinctes, de module plus petit que a, ou intérieures au cercle de rayon a.

Une dernière application est *le problème* 1687 (*N. A.*, 1895, p. 33 : 1917, p. 238) :

On sait que l'équation

$$\frac{d^n}{dx^n}[x^n(x-1)^n] = 0 \tag{6}$$

peut s'écrire

$$\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \cdots & \frac{1}{n+2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdots\cdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \cdot & \cdots & \frac{1}{2n} \\ 1 & x & x^2 & \cdots & x^n \end{vmatrix} = 0 \tag{7}$$

démontrer que l'équation

$$\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}[x^n(x-1)^n] = 0$$

peut de même s'écrire

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{2.3} & \frac{1}{3.4} & \cdots & \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\ \frac{1}{3.4} & \frac{1}{4.5} & \cdots & \frac{1}{(n+2)(n+3)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots \\ \frac{1}{n(n+1)} & \frac{1}{(n+1)(n+2)} & \cdots & \frac{1}{(2n+1)2n} \\ 1 & x & \cdots & x^{n-1} \end{vmatrix} = 0. \tag{8}$$

De même l'équation

$$\frac{d^{2n-K}}{dx^{2n-k}}[x^n(x-1)^n] = 0$$

peut s'écrire

$$\begin{vmatrix} \dfrac{1}{(n-k+1)(n-k+2)\ldots(2n-2k+1)} & \ldots & \dfrac{1}{(n+1)(n+2)\ldots(2n-k+1)} \\ \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ \dfrac{1}{n(n+1)\ldots(2n-k)} & \ldots & \dfrac{1}{(n+k)(n+k+1)\ldots 2n} \\ 1 & \ldots & x^k \end{vmatrix} = 0.$$

(Lucien Lévy).

Le premier membre de l'équation (6) est le polynome de Legendre (§ 6, 1°), où $a=0$, $b=1$; donc (§ 3) peut s'écrire

$$\begin{vmatrix} g & g_1 & \ldots & g \\ g_1 & g_2 & \ldots & g_{n+1} \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdots & \cdot\cdot \\ g_{n-1} & g_n & \ldots & g_{2n-1} \\ 1 & x & \ldots & x^n \end{vmatrix}, \qquad g_s = \int_0^1 x^s\,dx = \frac{1}{s+1};$$

donc l'équation (6) a la forme (7). Dérivant le premier membre de (7), on trouve

$$\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}[x^n(x-1^n]$$

$$= K \begin{vmatrix} 1 & \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{3} & \ldots & \dfrac{1}{n+1} \\ \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{3} & \dfrac{1}{4} & \ldots & \dfrac{1}{n+2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdots\cdot \\ \dfrac{1}{n} & \dfrac{1}{n+1} & \dfrac{1}{n+2} & \ldots & \dfrac{1}{2n} \\ 0 & 1 & 2x & \ldots & nx^{n-1} \end{vmatrix} \qquad (K = \text{const.}).$$

En retranchant des éléments de la ligne du rang n multipliés par n, les éléments de la ligne du rang $(n-1)$ multipliés par $(n-1)$; des éléments de la ligne du rang $(n-1)$ multipliés par $(n-1)$, les éléments de la ligne du rang $(n-2)$ multipliés par $(n-2)$, et ainsi de suite, en retranchant des éléments de la deuxième ligne multipliés par 2, les éléments de la première ligne, on trouve

$$\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}[x^n(x-1)^n]$$

$$= \mathrm{K}_1 \begin{vmatrix} \frac{1}{2.3} & \frac{2}{3.4} & \cdots & \frac{n}{(n+1)(n+2)} \\ \frac{1}{3.4} & \frac{2}{4.5} & \cdots & \frac{n}{(n+2)(n+3)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots \\ \frac{1}{n(n+1)} & \frac{2}{(n+1)(n+2)} & \cdots & \frac{n}{(2n-1)2n} \\ 1 & 2x & \cdots & nx^{n-1} \end{vmatrix}$$

$$\mathrm{K}_1 = (\text{const.}),$$

et divisant les colonnes respectivement par 2, 3, ..., n, on obtient la forme (8).

Procédant de la même manière avec l'équation obtenue, on a, de proche en proche, la forme demandée pour la dernière équation.

8. *Les polynomes orthogonaux* $\mathrm{P}_n(x)$ *vérifient la relation de récurrence* [10]

$$(9)\quad \frac{c_{n,n}}{c_{n+1,n+1}}\mathrm{P}_{n-1}(x) - (x-\alpha_n)\mathrm{P}_n(x) + \frac{c_{n-1,n-1}\mathrm{I}_n}{c_{n,n}\mathrm{I}_{n-1}},$$

$$\alpha_n = \frac{1}{\mathrm{I}_n}\int_a^b \varphi(x)\, x\, \mathrm{P}_n^2(x)\,dx, \qquad \alpha_n = \frac{c_{n,n-1}}{c_{n,n}} - \frac{c_{n+1,n}}{c_{n+1,n+1}}.$$

Cas particuliers : 1° $\varphi(x) = \psi_n(x) = 1$, $a = -1$, $b = 1$; les polynomes de Legendre vérifient la relation

$$(n+1)\mathrm{P}_{n+1} - x(2n+1)\mathrm{P}_n + n\mathrm{P}_{n-1} = 0.$$

2° $\varphi(x) = \psi_n(x) = (x-a)^\lambda (x-b)^\mu$;

$$\mathrm{I}_n = \frac{(-1)^n c_{n,n}}{(b-a)^n}\int_b^b (x-a)^n (x-b)^n \varphi(x)\,dx.$$

Dans le cas des polynomes [4] qui naissent de la série hypergéométrique,

$$P_n = \frac{1}{n!} x^{1-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha} \frac{d^n}{dx^n}[x^{n+\gamma-1}(1-x)^{n+\alpha-\gamma}],$$

on a

$$\frac{(n+\alpha)(n+1)P_{n+1}}{(2n+\alpha+1)(2n+\alpha)} + \left[x - \frac{2n^2+2\alpha n+\alpha\gamma-\gamma}{(2n+\alpha-1)(2n+\alpha+1)}\right]P_n + \frac{(n+\gamma-1)(n+\alpha-\gamma)}{(2n+\alpha)(2n+\alpha-1)}P_{n-1} = 0.$$

9. *La limite* ([11]) *du rapport* $\frac{P_{n-1}(x)}{P_n(x)}$ *pour* $n \to \infty$ *tend vers une racine de l'équation*

$$\lambda^2 - \frac{4}{b-a}\left(x - \frac{a+b}{2}\right)\lambda + 1 = 0,$$

déduite de la relation (9) qui est une relation de récurrence de Poincaré ([13]).

Les courbes de convergence des séries de Poincaré, $\Sigma a_n P_n(x)$, à une variable complexe, sont des ellipses de foyers a et b.

10. *La limite de* $\sqrt[n]{P_n(x)}$ *pour* $n \to \infty$ est ([9])

$$e^{\int_a^b \log(x-t)\frac{dt}{\sqrt{(t-a)(t-b)}}},$$

d'où l'on déduit que les courbes de convergence des séries de Poincaré, $\Sigma a_n P_n(x)$, *sont des ellipses de foyers a et b.*

11. *Les polynomes* $P_n(x)$ *sont les dénominateurs des réduites d'ordre n du développement de la fonc-*

tion

$$\int_a^b \frac{\varphi(y)}{y-x}\,dy$$

en fraction continue (14).

12. *Les polynomes* $P_n(x)$ *interviennent dans la théorie des quadratures mécaniques* (5). La valeur approchée de l'intégrale

$$I = \int_a^b \varphi(x) f(x)\,dx$$

est (15)

$$\int_a^b \varphi(x) P_{n-1}^2(x)\,dx \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{f(x_i)}{P'_n(x_i)\,P_{n-1}(x_i)}\right],$$

$x_1, \ldots, x_i$ étant les racines du polynome $P_n(x)$.