NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

GEORGES BOULIGAND

Sur une notion d'équivalence locale apte à préciser certains points de la théorie des enveloppes

Nouvelles annales de mathématiques 5e série, tome 1 (1922), p. 8-21

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1922_5_1__8_1>

[O¹2f, O¹6j]

SUR UNE NOTION D'ÉQUIVALENCE LOCALE APTE A PRÉCISER CERTAINS POINTS DE LA THÉORIE DES ENVELOPPES;

PAR M. GEORGES BOULIGAND.

1. Lorsqu'on développe, dans les cours d'analyse, la théorie des fonctions implicites, on s'en tient d'ordinaire à l'examen du *cas régulier :* soient x_0, y_0, α_0, des nombres tels qu'on ait

$$f(x_0, y_0, \alpha_0) = 0.$$

Pour établir l'existence d'une fonction α de x et y, satisfaisant à l'équation

$$f(x, y, \alpha) = 0,$$

et tendant vers α_0 quand x, y tendent respectivement vers x_0, y_0, on fait appel aux hypothèses suivantes : existence et continuité des dérivées premières de f dans le domaine du point x_0, y_0, α_0, et stipulation essentielle que f'_α n'est pas nulle en ce point.

On délaisse, en général, le cas où l'on aurait

$$(1) \qquad f'_\alpha(x_0, y_0, \alpha_0) = 0$$

et cela n'est pas sans préjudice pour l'exposition de la théorie des enveloppes, où l'hypothèse traduite par l'équation (1) joue un rôle fondamental.

Dans un travail récent [1] j'ai donné le moyen de combler cette lacune. Je me bornerai à rappeler ici le théorème suivant, qui nous sera utile dans la suite.

Supposons que, pour les valeurs x_0, y_0, α_0, on ait à la fois

$$f(x_0, y_0, \alpha_0) = 0, \qquad f'_\alpha(x_0, y_0, \alpha_0) = 0, \qquad f''_{\alpha^2}(x_0, y_0, \alpha_0) \neq 0,$$

la continuité étant réalisée pour les dérivées secondes. Supposons en outre que f'_x et f'_y ne soient pas nuls tous deux pour ce système de valeurs. Cherchons une fonction α de x, y satisfaisant à l'équation

$$f(x, y, \alpha) = 0,$$

qui soit continue dans le domaine du point x_0, y_0 et tende vers α_0, quand $x - x_0$ et $y - y_0$ tendent vers zéro. Au point x_0, y_0 (dans le plan xOy), il passe

(1) *Revue de l'Enseignement des Sciences*, novembre 1918, F. Alcan.

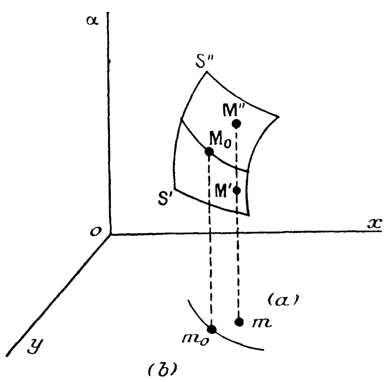
une branche de courbe et une seule satisfaisant aux équations

$$f = 0, \qquad f'_\alpha = 0.$$

La portion du plan avoisinant ce point est partagée par elle en deux régions (a) et (b). Si le point x, y est dans la région (a), il existe deux valeurs $\alpha'(x, y)$ et $\alpha''(x, y)$, vérifiant l'équation $f = 0$ et tendant vers α_0 lorsque $x - x_0$ et $y - y_0$ tendent vers zéro. Dans la région (b) il n'existe pas de valeur de α satisfaisant à ces conditions.

Si nous nous servons d'une représentation géométrique à trois dimensions, les hypothèses précédentes signifient que $M_0(x_0, y_0, \alpha_0)$ est situé sur le contour apparent dans l'espace, pour la direction de projetantes $O\alpha$, de la surface $f = 0$. Considérons ce contour apparent en projection sur le plan xOy : il partage la région qui avoisine m_0 en deux portions (a) et (b).

Fig. 1.



Une projetante qui traverse la portion (a) rencontre la surface $f = 0$ en deux points M' et M'' voisins de M_0.

Une projetante issue de la région (b) ne la rencontre pas [1].

On peut donc dire que le point m_0 appartient, dans ces conditions, à la frontière du domaine d'existence de la fonction implicite α de x et y, définie par l'équation $f = 0$.

Dans cette étude, toutes les propositions, à l'exemple de la précédente, ont un caractère local, c'est-à-dire établissent des relations entre des eléments infiniment voisins d'éléments connus. C'est au point de vue local que nous nous placerons exclusivement dans ce qui va suivre.

2. Pour bien définir notre sujet, rappelons d'abord un fait classique. Considérons le système d'équations

$$f(x, y, \alpha) = 0, \qquad g(x, y, \alpha) = 0.$$

Soit

$$F(x, y) = 0$$

l'équation obtenue en éliminant α entre les deux précédentes. En général, *on n'a pas le droit* de substituer au système

$$f = 0, \qquad g = 0,$$

le suivant

$$F = 0, \qquad g = 0.$$

Ce théorème a un sens bien précis dans le domaine des fonctions algébriques, en raisonnant sur l'ensemble des valeurs complexes des variables, et en regardant globalement les intersections des surfaces définies par les équations précédentes (α représentant toujours une *cote*).

---

[1] En somme, c'est là une conséquence de l'hypothèse $f''_{\alpha^2} \neq 0$, qui exprime que la surface ne s'infléchit pas, le long du contour apparent, par rapport à son cylindre circonscrit.

Il exprime que le cylindre, projetant sur xOy l'intersection des surfaces $f = 0$ et $g = 0$, a en commun avec la surface $g = 0$, non seulement l'intersection précédente, mais aussi, en général, d'autres courbes.

Mais on peut aussi envisager cette proposition et la rendre valable dans le domaine réel, en supposant que f et g soient seulement des fonctions continues ainsi que leurs dérivées jusqu'à un certain ordre, et remplissant certaines conditions analogues à celles de l'énoncé du théorème des fonctions implicites. On se placera donc cette fois au point de vue local.

C'est dans ces hypothèses que nous nous proposons de préciser l'énoncé de l'affirmation précédente.

3. Essayons donc de définir l'élimination *locale*. Supposons que, pour un système de valeurs x_0, y_0, α_0, nous ayions à la fois

$$f(x_0, y_0, \alpha_0) = 0, \qquad g(x_0, y_0, \alpha_0) = 0.$$

Les deux équations

$$f(x_0, y_0, \alpha) = 0, \qquad g(x_0, y_0, \alpha) = 0$$

ont donc une racine commune, et il s'agit d'étudier l'ensemble des systèmes de valeurs x, y voisins de x_0, y_0 pour lesquels les deux équations

$$f(x, y, \alpha) = 0 \qquad g(x, y, \alpha) = 0$$

ont une ou plusieurs racines α communes et infiniment voisines de α_0.

Supposons d'abord que g'_α ne s'annule pas pour le système des valeurs x_0, y_0, α_0. Il existe alors une fonction $\alpha(x, y)$ et une seule, définie dans le domaine du point x_0, y_0, qui satisfait à l'équation $g = 0$ et qui tend vers α_0 lorsque $x - x_0$ et $y - y_0$ tendent vers zéro. Les deux équations données auront alors au plus une racine commune voisine de α_0, et cela, moyennant la condition

$$f[x, y, \alpha(x, y)] = 0.$$

Cette équation représente une courbe qui passe au point m_0, et qui offre un caractère plus ou moins simple, suivant les propriétés des dérivées de f et g. (Si le point x_0, y_0, α_0 est ordinaire pour chacune des surfaces $f = 0$, $g = 0$, et si, de plus, les plans tangents en ce point sont distincts, il y passe une branche de l'intersection, et l'on aura une circonstance analogue en projection sous le plan xOy.)

Dans ce cas, au point de vue local, on peut considérer indifféremment l'un ou l'autre des systèmes suivants :

$$\begin{cases} f(x, y, \alpha) = 0 \\ g(x, y, \alpha) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} f[x, y, \alpha(x, y)] = 0 \\ g(x, y, \alpha) = 0. \end{cases}$$

Nous pouvons dire qu'ils sont *localement équivalents*.

4. Envisageons maintenant l'hypothèse

$$g'_{\alpha}(x_0, y_0, \alpha_0) = 0, \qquad \text{mais avec} \qquad g''_{\alpha^2}(x_0, y_0, \alpha_0) \neq 0.$$

Le point x_0, y_0 est alors sur la frontière du domaine d'existence de la fonction implicite $\alpha(x, y)$ définie par $g = 0$, ou encore, le point x_0, y_0, α_0 de l'espace est sur le contour apparent de $g = 0$. Dans le plan xOy, il nous faut subdiviser le domaine du point x_0, y_0 en deux régions (a) et (b). Une projetante, issue de la première, rencontre la surface en deux points et nous fournit deux déterminations $\alpha'(x, y)$ et $\alpha''(x, y)$ de la fonction α. Dans la région (b), il n'existe pas de valeur α répondant à la question.

Plaçons-nous dans la région (a), et réservons l'appellation α' pour désigner la cote la plus faible parmi celles des deux points où la projetante issue de m coupe S. Soit M′ le point correspondant et soit de même M″ le point dont la cote α'' est la plus grande. Soit S′ la portion S, voisine de M_0, et au-dessous du contour apparent, c'est-à-dire offerte aux points M′, S″ la portion de S offerte aux points M″.

Pour accomplir l'élimination locale, nous devons écrire simultanément

$$f[x, y, \alpha'(x, y)] = 0, \qquad f[x, y, \alpha''(x, y)] = 0.$$

Plaçons-nous dans les conditions les plus simples possibles. Supposons que M_0 soit un point ordinaire pour chacune des surfaces $f = 0$, $g = 0$, et que les plans tangents correspondants soient distincts. Il passera en M_0 une branche et une seule de l'intersection. Nous supposerons encore que sa tangente en M_0 n'est pas parallèle à $O\alpha$: *il faut et il suffit pour cela que* M_0 *ne soit pas sur le contour apparent de* $f = 0$. En projection sur le plan xOy, cette branche d'intersection devient une courbe tangente en m_0 à l'enveloppe des courbes

$$g(x, y, \alpha) = 0.$$

Dans l'espace, le point M_0 la subdivise d'ailleurs en deux tronçons, l'un θ' situé sur S′ et l'autre θ'' situé sur S″.

Cela posé, envisageons les deux systèmes

$$(\sigma) \qquad \begin{cases} f(x, y, \alpha) = 0, \\ g(x, y, \alpha) = 0; \end{cases}$$

$$(\sigma') \qquad \begin{cases} f[x, y, \alpha'(x, y)]\, f[x, y, \alpha''(x, y)] = 0, \\ g(x, y, \alpha) = 0. \end{cases}$$

Nous allons montrer que le système **(σ') admet** des solutions étrangères au système (σ).

En effet, la projection sur xOy du tronçon θ' provient de l'équation

$$f[x, y, \alpha'(x, y)] = 0.$$

Considerons un systeme x, y de valeurs satisfaisant à cette equation. La projetante correspondante coupe S′ en un point de cote $\beta''(x, y)$. Les coordonnées de ce point satisfont au système (σ'), mais non à (σ). Partons de même du tronçon θ'', représenté en projection par

$$f[x, y, \alpha''(x, y)] = 0.$$

Une des projetantes correspondantes coupe S″ en un point de cote $\beta'(x, y)$, qui satisfait à (σ') et non à (σ).

Dans le cas actuel, il n'y a donc pas équivalence locale.

5. Supposons maintenant que M_0 soit encore un point ordinaire pour chacune de nos surfaces $f = 0$, $g = 0$, ainsi que pour leur intersection, et se trouve sur les contours apparents de chacune d'elles, c'est-à-dire supposons que l'on ait à la fois

$$f(x_0, y_0, \alpha_0) = 0, \qquad g(x_0, y_0, \alpha_0) = 0,$$
$$f'_\alpha(x_0, y_0, \alpha_0) = 0, \qquad g'_\alpha(x_0, y_0, \alpha_0) = 0.$$

La projection de l'intersection sur le plan xOy offre alors en m_0 un point de rebroussement. Les deux tronçons séparés par ce point proviennent dans l'espace de deux arcs situés, l'un dans la région S′, l'autre dans la région S″. Pour les mêmes raisons que précédemment, il ne peut y avoir dans ces conditions équivalence locale. Il n'y a exception que si les projections de l'arc de la région S' et de l'arc de la région S'' se superposent. L'équivalence réapparaît alors, en même temps que, en chaque point x, y de la projection commune, les deux équations

$$f(x, y, \alpha) = 0, \qquad g(x, y, \alpha) = 0$$

possèdent deux racines α communes.

6. On pourrait développer la théorie en posant des hypothèses de plus en plus complexes. Nous n'insisterons pas davantage, et nous nous bornerons à montrer l'opportunité des notions précédentes, en y rattachant l'explication d'un paradoxe souvent cité, à propos des familles de courbes gauches à un paramètre. Soit la famille

$$(\Sigma) \qquad f(x, y, z, \alpha) = 0, \qquad g(x, y, z, \alpha) = 0$$

Elle n'admet d'enveloppe que si l'on peut trouver trois fonctions derivables x, y, z de α, vérifiant, outre les équations du système (Σ), les deux suivantes :

$$f'_\alpha = 0, \qquad g'_\alpha = 0.$$

En général, il n'y a donc pas d'enveloppe. Cependant, la solution semble tout autre lorsqu'on se place au point de vue suivant. Éliminons α entre les équations du système (Σ), soit

$$F(x, y, z) = 0$$

l'équation obtenue. Considérons le système

$$(\Sigma') \qquad F(x, y, z) = 0, \qquad g(x, y, z, \alpha) = 0.$$

Les courbes données satisfont à ce système. Or il semble qu'ici, l'application de la règle classique conduise à une enveloppe, définie par les équations

$$(2) \qquad F = 0, \qquad g = 0, \qquad g'_\alpha = 0.$$

La théorie précédente résout immédiatement la difficulté : en effet, puisque nous avons $g'_\alpha = 0$, nous sommes dans les conditions où le système (Σ') admet des solutions étrangères au système (Σ). Mais, il est intéressant de pousser plus avant cette étude.

7. Considérons un système de valeurs x_0, y_0, z_0, α_0 satisfaisant à nos trois dernières équations : en vertu des deux dernières, le point x_0, y_0, z_0 est sur la frontière du domaine d'existence de la fonction implicite $\alpha(x, y, z)$ définie par

$$g = 0.$$

Supposons réalisées les conditions où il passe, en x_0, y_0, z_0, une nappe unique de cette frontière, admettant x_0, y_0, z_0 comme point ordinaire et séparant l'espace environnant en deux régions A et B : en chaque point de A, on obtient deux déterminations $\alpha'(x, y, z)$ et $\alpha''(x, y, z)$ de notre fonction implicite; soit toujours $\alpha' < \alpha''$. Ces déterminations disparaissent dans B.

L'équation

$$f[x, y, z, \alpha'(x, y, z)] = 0$$

représente un premier tronçon de $F = 0$. L'équation

$$f[x, y, z, \alpha''(x, y, z)] = 0$$

en représente un second. Ces deux tronçons se soudent suivant une ligne L, lieu des points qui vérifient les équations (2). *Supposons d'abord que f'_α ne soit pas nul sur* L : alors, cette courbe est une ligne de contact de $F = 0$ avec l'enveloppe des surfaces $g = 0$: il suffit pour le voir de pratiquer dans les surfaces étudiées des sections par des plans $z =$ const., ce qui nous ramène aux conditions du n° 4, puis de faire varier ensuite le plan de section.

Cela posé, en un point x, y, z du tronçon

$$f(x, y, z, \alpha'(x, y, z)] = 0,$$

l'équation $g = 0$ a deux racines localement acceptables : la plus petite α' vérifie

$$f(x, y, z, \alpha) = 0,$$

mais il n'en est pas de même de la plus grande β''. Nous employons à dessein cette notation β' pour indiquer que la courbe définie par les équations

$$f[x, y, z, \alpha'(x, y, z)] = 0, \qquad g(x, y, z, \beta'') = 0$$

ne satisfait plus au système (Σ). Pour l'autre tronçon, on peut faire un raisonnement analogue.

D'après cela, en un point de $F = 0$, voisin de M_0, il passe deux courbes satisfaisant au systeme (Σ') : une courbe C_α, répondant au système (Σ), et une courbe C_β, étrangère à ce système.

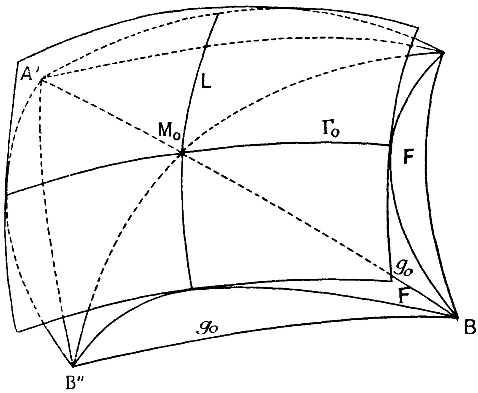
Sur la ligne L, les valeurs α et β se confondent : montrons cependant qu'elle ne joue pas le rôle d'une enveloppe.

En chaque point de L, passe une surface $g = 0$ et une seule, tangente a l'enveloppe des surfaces $g = 0$, donc tangente aussi à $F = 0$. Désignons par Γ_0 la ligne de contact de cette enveloppe et de la surface

$$(g_0) \qquad g(x, y, z, \alpha_0) = 0$$

qui passe en M_0. Pour un observateur de la région B, qui regarde M_0, la surface F est en avant de la surface g_0 le long de la ligne L, et l'inverse se produit le long de Γ_0. L'intersection de F et de g_0 présente donc

Fig. 2.



en M_0 deux branches réelles, dont les tangentes sont disposées par rapport à L et Γ_0 comme l'indique la figure ci-dessus.

Prenons un point quelconque sur l'une de ces branches de courbe : en ce point, l'équation

$$g(x.y.z, \alpha) = 0$$

a deux racines, dont l'une est égale à α_0. La seconde est plus grande que α_0, ou plus petite que α_0, suivant que le point x, y, z considéré appartient à l'une ou à l'autre des portions de la surface g_0 délimitées par la ligne Γ_0. Supposons, pour fixer les idées, que la seconde racine surpasse α_0 sur la portion $\Gamma_0 A' A''$, et soit dépassée par elle sur $\Gamma_0 B' B''$.

Supposons en outre que la portion $LA'B'$ de F soit celle qui correspond à l'équation

$$f[x, y, z, \alpha'(x, y, z)] = 0,$$

que la portion $LA''B''$ corresponde à

$$f[x, y, z, \alpha''(x, y, z)] = 0.$$

Dans ces conditions, sur l'arc M_0A' de l'intersection, la plus petite des deux racines est $\cot\alpha_0$. Puisque nous sommes sur le tronçon $LA'B'$, nous pouvons affirmer que l'arc M_0A' appartient à la courbe C_α pour $\alpha = \alpha_0$. Il en est de même de l'arc M_0B'', le long duquel la plus grande racine est α_0, alors qu'on se trouve sur le tronçon $LA''B''$.

Par contre, les arcs M_0A'' et M_0B' appartiendront à une courbe C_β telle que $\beta = \alpha_0$. Et en effet, sur M_0A'' par exemple, α_0 est la plus petite des deux racines, alors qu'on se trouve sur le tronçon $LA''B''$.

En résumé, aucune propriété spéciale ne distingue les points de L des autres points de la surface $F = 0$: par tout point de cette surface voisin de M_0 il passe, dans les conditions précédentes, une courbe C_α et une courbe C_β. Leurs tangentes étant distinctes, aucun phénomène de contact ne se produit.

8. Pour terminer, examinons sommairement ce qui arrive en supposant remplies les conditions pour l'existence de l'enveloppe. Il nous suffit de nous reporter à ce qui a été dit au n° 5, en recourant au même processus que précédemment : génération de la figure à l'aide de sections par des plans $z =$ const. Nous obtenons alors le résultat suivant : il y a encore deux tronçons de la surface $F = 0$ qui se soudent le long de la ligne L, mais, cette fois, L joue le rôle d'une arête de rebroussement. Chaque courbe C_α est alors partagée en deux arcs par son point de contact avec l'enveloppe L. L'un des tronçons de $F = 0$ est le lieu

des arcs d'une série, l'autre tronçon est décrit par les arcs de l'autre série.

Il peut arriver comme cas particulier que les deux tronçons de $F = 0$ se superposent l'un à l'autre, et qu'en un point de cette surface double, les deux équations

$$f(x, y, z, \alpha) = 0, \qquad g(r, y, z, \alpha) = 0$$

aient deux racines communes en α, qui se confondent sur l'enveloppe. Cette circonstance se présente toujours lorsqu'on part d'une surface donnée et qu'on considère sur cette surface une famille de courbes à un paramètre tangente a une courbe fixe de la surface. L'arête de rebroussement constituée par cette courbe est alors, il va sans dire, purement fictive.