Nouvelles annales de mathématiques

Concours d'agrégation de 1921

Nouvelles annales de mathématiques 5e série, tome 1 (1922), p. 65-72

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1922_5_1__65_1>

CONCOURS D'AGRÉGATION DE 1921.

Mécanique rationnelle.

DEUXIÈME QUESTION.

Un pendule balistique se compose d'un cylindre de révolution C, *d'axe horizontal, rempli de terre et pouvant osciller librement autour d'un axe horizontal perpendiculaire à l'axe du cylindre, la plus courte distance* AB *des deux axes étant verticale et ayant pour longueur* 10^{m}. *Le poids de* C *est supposé être de* 10 *tonnes, et l'on néglige, par rapport à lui, le poids des organes de suspension.*

Ce cylindre est utilisé comme cible pour des balles de mitrailleuses dont la vitesse est parallèle à son axe et qui s'incorporent dans sa masse symétriquement à l'axe. Le poids de chaque balle est de 10^{g} *et l'on en tire dix par seconde. La durée du tir est assez courte pour que le poids total des balles tirées soit négligeable par rapport au poids du cylindre, et assez longue cependant pour que le cylindre prenne une position apparente d'équilibre, dans* *laquelle la droite* AB, *cessant d'être verticale, fait un angle de* 3 *décigrades avec la verticale. Calculer la vitesse des balles.*

SOLUTION
Par M. G. BOULIGAND.

Dans les conditions de l'énoncé, nous pouvons admettre, que dans l'intervalle de deux chocs, l'angle θ du pendule avec la verticale satisfait à l'équation différentielle des petites oscillations

$$l\frac{d^2\theta}{dt^2} = -g\theta.$$

Cette hypothèse sera d'ailleurs légitimée *a posteriori*, grâce au choix opportun des données numériques.

Prenons pour unité de longueur le centimètre, pour unité de masse le gramme, pour unité de temps la seconde. Nous aurons ici

$$g = 981, \qquad l = 10^3.$$

Nous pouvons donc écrire approximativement

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\theta. \tag{1}$$

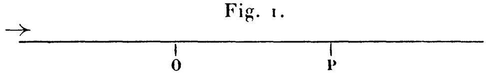
Cela posé, calculons l'accroissement brusque de vitesse subi par le cylindre à l'arrivée de chaque balle. Soit $\omega = \frac{d\theta}{dt}$ la vitesse angulaire, $\Delta\omega$ son accroissement lors de l'arrivée d'une balle. On calcule $\Delta\omega$ en appliquant le théorème du moment cinétique par rapport à l'axe de suspension, ce qui élimine les percussions de réaction de cet axe. Appelons MK^2 le moment d'inertie de l'appareil total par rapport à cet axe, et a la distance AB.

Puisque l'énoncé nous autorise à négliger le poids des balles déjà incorporées, nous aurons

$$\text{(2)} \qquad MK^2\,\Delta\omega = mVa,$$

en appelant V la vitesse inconnue des balles, et en assimilant à une droite la portion utile de la trajectoire du centre du cylindre. Puisque l'énoncé ne donne aucune indication sur les dimensions du cylindre, il est légitime de faire $K^2 = a^2$. Représentons par v la vitesse de translation du cylindre, le long de la droite décrite par son centre, par O la position d'équilibre normal de ce centre, par P sa position à l'instant t,

Fig. 1.



par x le segment $\overline{OP}$. Avec ces notations, l'équation (2) peut s'écrire

$$M\,\Delta v = mV$$

ou

$$\Delta v = \frac{1}{10^6}V.$$

Chaque balle fournit donc au cylindre une impulsion correspondant à un accroissement de vitesse égal à $\frac{V}{10^6}$. Soit $\tau = \frac{1}{10}$ de seconde, l'intervalle qui s'écoule entre deux chocs. L'élongation de P sera définie comme il suit :

$$0 < t < \tau, \qquad x = \frac{V}{10^6}\sin t,$$

$$\tau < t < 2\tau, \qquad x = \frac{V}{10^6}[\sin t + \sin(t-\tau)],$$

$$2\tau < t < 3\tau, \qquad x = \frac{V}{10^6}[\sin t + \sin(t-\tau) + \sin(t-2\tau)],$$

$$\dots\dots\dots, \qquad \dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

$$n\tau < t < (n+1)\tau, \qquad x = \frac{V}{10^6}[\sin t + \sin(t-\tau) + \sin(t-2\tau) + \ldots + \sin(t-n\tau)].$$

En effet, la première détermination de x correspond bien aux conditions initiales du mouvement : départ de la verticale avec la vitesse $\frac{V}{10^6}$; la seconde détermination de x correspond bien à la même élongation que la première pour $t = \tau$, et présente pour cette même valeur, par rapport à la première détermination, l'accroissement de vitesse $\frac{V}{10^6}$, etc.

On peut, par un calcul classique, transformer ces sommes en produit. Mais ce calcul n'est pas bien utile. Il nous montrerait seulement que si l'on fait croître τ indéfiniment, *x ne tend vers aucune limite.* Voilà une circonstance extrêmement troublante, et un candidat ayant attaqué la question par ce côté devait conclure que *la position apparente indiquée dans l'énoncé n'existe pas* (point de vue A).

Voici d'ailleurs un calcul approché qui donne x à un instant quelconque. Reprenons l'équation définissant x dans l'intervalle $n\tau$, $(n+1)\tau$. En multipliant les deux membres par τ, et en remarquant que l'intervalle τ est petit par rapport à la demi-période d'une oscillation non troublée (il en est environ la trente et unième partie), nous pouvons écrire sensiblement

$$\frac{x}{10} = \frac{V}{10^6}\int_0^t \sin(t-u)\,du$$
$$= \frac{V}{10^6}(1-\cos t),$$

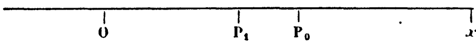
d'où

$$x = \frac{V}{10^5}(1-\cos t). \tag{3}$$

On voit immédiatement que cette élongation est celle d'un mouvement oscillatoire dont une des positions extrêmes correspond au point O (c'est-à-dire à la verticale) et dont l'autre a pour abscisse $\frac{2V}{10^5}$.

D'autres candidats auront sans doute raisonné de la façon suivante. L'énoncé indique une position apparente d'équilibre. Supposons réalisé un état de régime, rigoureusement périodique, de période $\frac{1}{10}$ de seconde. Soit P_0 la position où la vitesse du mobile est rigoureusement nulle. Le mobile étant en P_0, à un instant t_0, marchera, d'un mouvement accéléré, jusqu'à une position P_1 où il sera heurté par la balle, laquelle aura

Fig. 2.



pour effet de le faire retourner en P_0, d'un mouvement retardé, qui est la réversion du précédent. Soit v_1 la vitesse du mouvement de retour pour la position P_1. Nous avons

$$2v_1 = \frac{V}{10^6}.$$

Dans l'intervalle de temps $\left(t_0,\ t_0 + \frac{\tau}{2}\right)$, le mouvement de P est défini par

$$x = \overline{OP_0}\cos(t - t_0).$$

Nous avons donc

$$v_1 = \overline{OP_0}\sin\frac{\tau}{2}.$$

Comme P_1 est très voisin de OP_0

$$\left[\overline{OP_0} - \overline{OP_1} = 2\overline{OP_0}\sin^2\frac{\tau}{4} = \frac{1}{800}\right],$$

nous pouvons confondre la position d'équilibre apparente avec P_0. Nous aurons d'ailleurs

$$\overline{OP_0} = 10^3 \times \frac{0,3 \times \pi}{200} = \frac{9,4}{2} = 4,7.$$

Remplaçons approximativement $\sin\frac{\tau}{2}$ par $\frac{1}{20}$, il vient

$$\frac{\overline{OP_0}}{20} = \frac{V}{2.10^6},$$

la position d'équilibre apparent serait donc liée à V par

$$\overline{OP_0} = \frac{V}{10^5}. \tag{4}$$

C'est la moyenne de l'élongation définie par l'équation (3). Les candidats qui ont adopté ce point de vue (point de vue B) sont sortis sans doute de la séance plus satisfaits que les premiers. Tout au plus, auront-ils pu être choqués légèrement de trouver une valeur de la vitesse V égale à 4700 m : sec. Mais ce n'est évidemment là qu'une petite négligence dans le choix des données numériques. Il eût suffi d'attribuer au pendule un poids d'une tonne pour trouver une vitesse dix fois plus petite, et en même temps compatible avec les conditions expérimentales ordinaires.

Toutefois, en se ralliant au point de vue B, on obtient un mouvement compatible avec les conditions indéfinies, mais non avec les conditions initiales du problème.

Aucun des points de vue A et B n'est donc parfaitement compatible avec l'énoncé. C'est là une conséquence de ce fait que nous nous sommes placés dans les conditions où la *Mécanique Rationnelle* étudie d'ordinaire le pendule, c'est-à-dire en négligeant son amortissement par la résistance de l'air et par le frottement des appareils de suspension sur leurs supports.

La face de la question est complètement changée lorsqu'on fait entrer en ligne de compte ces résistances passives. Pour présenter la solution, nous partirons de la remarque suivante : lorsque, nous plaçant au point de vue A, nous avons substitué, à la somme de sinus qui définit l'élongation dans l'intervalle de temps $[n\tau, (n+1)\tau]$, une intégrale qui se ramène à l'expression (3); nous avons substitué, au mouvement réel, un mouvement rapproché et *continu* très voisin, se produisant sous l'action d'une force qui satisfait à l'équation

$$(5) \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{V}{10^5} - x,$$

c'est-à-dire qui s'obtient en composant à la force $-x$ du mouvement pendulaire non troublé une force constante $\frac{V}{10^5}$ qui, en une seconde, communique un accroissement de vitesse $\frac{V}{10^5}$, et par suite est approximativement équivalente aux dix chocs qui se produisent pendant cette seconde, fournissant chacun l'accroissement de vitesse $\frac{V}{10^6}$. Mais alors, tous les mouvements apparents que nous observerions indépendamment des résistances passives sont régis par l'équation (5). En particulier, la valeur

$$(6) \qquad x = \frac{V}{10^5}$$

fournit la position d'équilibre apparent que nous a fourni le point de vue B.

Plaçons-nous dans les conditions de l'énoncé, c'est-à-dire supposons que le pendule parte de la verticale. D'après l'équation (5), il va osciller autour de la position d'équilibre apparent, et on retrouve l'équation (3). Mais, si l'on tient compte des résistances, on trouvera nécessairement que le pendule tend vers sa position apparente d'équilibre, définie par (6), de même qu'un pendule qu'on écarte de la verticale dans les conditions ordinaires tend à y revenir par amortissement après un certain nombre d'oscillations.

Ainsi se trouve concilié, avec l'énoncé, le résultat obtenu en adoptant le point de vue (B).