Nouvelles annales de mathématiques

Ch. Bioche

Remarques sur les trièdres

Nouvelles annales de mathématiques 5e série, tome 1 (1922), p. 63-65

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1922_5_1__63_1>

[K^1 13b]

REMARQUES SUR LES TRIÈDRES;

Par M. Ch. BIOCHE.

1. On sait que, dans un trièdre, les sinus des faces sont proportionnels aux sinus des dièdres; on peut

trouver une signification géométrique simple au rapport de deux sinus correspondants.

Si a, b, c sont les faces d'un trièdre et A, B, C les dièdres, le volume V du rhomboèdre admettant ce trièdre est donné par

$$V = \sin a \sin b \sin C;$$

le volume V_1 correspondant au trièdre supplémentaire, ou réciproque, du trièdre considéré, est donné par

$$V_1 = \sin A \sin B \sin c;$$

on en déduit :

$$\frac{V}{V_1} = \frac{\sin a}{\sin A},$$

en remarquant que, par suite de la relation rappelée plus haut, il y a simplification dans le rapport des produits de sinus.

Comme on a appelé sinus du trièdre le volume V, par analogie avec ce fait que le sinus d'un angle plan mesure l'aire du losange de côté 1 construit sur cet angle, on arrive à l'énoncé suivant : *dans un trièdre, le rapport du sinus d'une face au sinus du dièdre opposé est égal au rapport du sinus de ce trièdre au sinus du trièdre réciproque.*

2. Une discussion facile permet de voir que, si le rapport considéré est égal à 1, l'une des faces du trièdre est supplémentaire du rectiligne du dièdre opposé, les autres faces étant égales aux rectilignes correspondants.

Si ces faces sont a, b, c, les dièdres sont donnés par

$$A = \pi - a \qquad B = b \qquad C = c.$$

Et, pour le trièdre réciproque, on a

$$\begin{array}{lll} a' = \pi - A = a & b' = \pi - B = \pi - b & c' = \pi - C = \pi - c \\ A' = \pi - a = A & B' = \pi - b = \pi - B & C' = \pi - c = \pi - C; \end{array}$$

de sorte que si, en outre des conditions précédemment supposées, on a $b+c=\pi$, les éléments du deuxième trièdre sont donnés par

$$a' = a \qquad b' = c \qquad c' = b$$
$$A' = A \qquad B' = C \qquad C' = B.$$

Autrement dit, chacun des trièdres réciproques considérés est égal au symétrique de l'autre.