NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

GEORGES BOULIGAND

Introduction à l'étude de la mécanique et de ses principes

Nouvelles annales de mathématiques 5e série, tome 1 (1922), p. 50-58

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1922_5_1__50_0>

[R6]

INTRODUCTION A L'ÉTUDE DE LA MÉCANIQUE ET DE SES PRINCIPES;

Par M. Georges BOULIGAND.

En raison des polémiques soulevées par les travaux d'Einstein, il paraît désirable de donner à nos étudiants quelques idées précises sur les principes de la Mécanique, ainsi que des vues d'ensemble sur les nombreux faits d'observation que la théorie newtonienne a permis de coordonner : c'est là une préparation nécessaire à la lecture des Ouvrages d'actualité et à la compréhension des doctrines relativistes. Elle montrera en même temps que l'ancienne Mécanique demeure, à titre de première approximation, et qu'elle demeurera sans doute longtemps. Notre but étant ainsi précisé, nous espérons qu'on voudra bien nous excuser d'avoir fait, dans ce travail, beaucoup d'emprunts à des Ouvrages classiques : il ne s'agit nullement de présenter ici des matériaux nouveaux, mais, si possible, d'établir une suite d'idées.

1. La Mécanique s'est développée à la base de cette affirmation : « La force, agissant sur la matière, produit le mouvement. » Cet énoncé, qui semblerait aujourd'hui trop vague, a inspiré et orienté les chercheurs pendant de longs siècles (1).

(1) Voyez l'article de M. Painlevé : *Les axiomes de la Mécanique et le principe de causalité* (*Bulletin de la Société française de philosophie*, février 1905.

Historiquement, l'étude des principes de la Mécanique a emprunté ses éléments à trois domaines différents :

1° Celui de l'Astronomie, et plus spécialement, de notre système solaire;

2° Celui des phénomènes terrestres, c'est-à-dire des mouvements voisins de l'écorce de notre planète;

3° Celui de l'Optique et de l'Électromagnétisme.

Dans les deux premiers ordres d'idées, les résultats d'expérience, par des routes convergentes, ont amené les penseurs à induire un petit nombre de principes, expliquant parfaitement les phénomènes observés. Plus récemment, les études d'ordre optique ou électrique tendent à montrer que la théorie ainsi obtenue est sans doute valable, mais seulement à titre de première approximation; toutefois, le degré de cette approximation est tel qu'on peut s'abstenir de le dépasser en mécanique terrestre et dans la plupart des problèmes de mécanique céleste.

De ce qui touche à l'Optique, nous ne parlerons qu'incidemment Nous analyserons d'abord les indications de l'Astronomie : elles sont, au point de vue expérimental, les plus précises. Notons que, historiquement, les premiers pas ont été accomplis par l'étude des phénomènes terrestres et, principalement, de la Statique. Suivant la route inverse, et synthétisant d'abord les résultats relatifs aux mouvements des astres, nous montrerons plus loin que les principes directeurs de cette synthèse cadrent bien avec les phénomènes terrestres.

2. Nous aurons surtout en vue la coordination des résultats relatifs aux mouvements du système solaire. Il est à prévoir de grands progrès, à mesure qu'on

parviendra à préciser les mouvements d'étoiles plus nombreuses; mais cette tâche est loin d'être achevée. Rappelons les résultats acquis dans cet ordre d'idées. On peut subdiviser les étoiles en deux catégories :

1° Les étoiles fixes, ou mieux, celles dont il est impossible d'apprécier des déplacements apparents, parce qu'elles sont les plus éloignées. Ces étoiles forment un ensemble pratiquement invariable sur la sphère céleste; elles nous fournissent dans l'Univers des directions fixes, ou du moins telles, pendant une durée très longue. A ce point de vue, elles nous seront très utiles dans la suite.

2° Les étoiles douées de déplacements sensibles (par rapport aux précédentes) : l'amplitude annuelle de ces derniers peut atteindre jusqu'à 7″. En étudiant au point de vue global ces déplacements, on constate que les étoiles correspondantes se meuvent les unes par rapport aux autres. Il est impossible d'expliquer les résultats de l'observation, en admettant que les étoiles forment un système invariable, par rapport auquel se mouvrait le Soleil : une telle hypothèse exigerait que tous les déplacements apparents soient des arcs de grand cercle, s'écartant d'un même point de la sphère céleste. Elle est infirmée par l'expérience. Toutefois, on constate qu'un grand nombre de déplacements observés participent à ce caractère général de divergence à partir d'un point fixe ou, ce qui revient au même, de convergence vers le point diamétralement opposé, soit vers Sirius. On en conclut à un mouvement d'entraînement probable du système solaire vers la constellation d'Hercule (opposée à Sirius). Définissons un trièdre, par les conditions que les directions de ses axes soient fixes et que les mouvements propres des étoiles n'aient par rapport à lui *aucune orientation spéciale* [1]; le sommet de ce trièdre s'éloignerait du Soleil vers Sirius avec une vitesse de l'ordre de grandeur de 25^{km} par seconde. On est tenté ici de conclure à un pas fait en faveur de l'objectivité du mouvement absolu. Nous nous abstiendrons de discuter cette question.

3. Le point capital sera pour nous de montrer comment on peut rattacher à quelques principes simples la synthèse, extrêmement approchée, des mouvements des corps très nombreux qui gravitent autour de notre Soleil.

Les premiers éléments de cette synthèse nous sont fournis par les trois lois suivantes, que Képler énonça, après avoir revisé et complété les observations de Tycho-Brahé :

1° *Les planètes décrivent des ellipses, dont le Soleil occupe un des foyers.*

2° *L'aire balayée par le rayon vecteur qui va du Soleil à la planète est proportionnelle au temps.*

3° *Les cubes des grands axes sont proportionnels aux carrés des durées des révolutions.*

Ces lois font intervenir un système de référence, d'orientation constante par rapport aux étoiles fixes, et vis-à-vis duquel le centre du Soleil est à peu près invariable (*voyez* n° 7). Ce système, c'était, pour Képler et ses successeurs, l'espace absolu lui-même dont ils admettaient l'existence d'une manière plus ou moins consciente. Non moins indubitable leur paraissait la notion d'un temps absolu, voulant bien *couler uniformément*, croyance acceptée et formulée explicitement par Newton.

---

(1) Painlevé, *ibid.*

4. Les discussions récentes nous obligent à présenter cette dernière hypothèse sous une forme plus positive :

Il est possible de définir la simultanéité de deux événements indépendamment du système de référence et, en conséquence, de mesurer le temps de la même manière dans tous les systèmes.

Voilà, au fond, à quoi revient la pétition du temps absolu.

A partir de ce postulat, joint à ceux de la géométrie ordinaire, on peut construire un édifice parfaitement logique, la Cinématique classique. Mais de même que nous renoncerions aux conceptions d'Euclide, en faveur de celles de Riemann, du jour où une mesure aurait assigné plus de deux droits à la somme des angles d'un triangle, de même une nouvelle Cinématique semble, pour des raisons expérimentales, préférable à la Cinématique classique.

De la réponse donnée par cette dernière au problème de la composition des vitesses, il résulterait, en effet, ce qui suit : soient deux systèmes S et S'; S' est animé par rapport à S d'une translation rectiligne et uniforme. Considérons un rayon lumineux se propageant dans la direction de cette translation. Soient V sa vitesse par rapport à S et V' sa vitesse par rapport à S'. Soit enfin v la vitesse de S' par rapport à S. On devrait avoir [1]

$$V = V' + v,$$

Or, l'expérience de Michelson est en désaccord avec

[1] Si toutefois l'on admet qu'il est possible de construire la Mécanique, et en particulier la Cinématique, de manière à en déduire l'explication de tout phénomène physique, et à en faire dépendre les lois de propagation des ondes lumineuses ou électromagnétiques.

ce résultat et conduit à

$$V = V',$$

et, plus généralement, à la conclusion suivante :

La vitesse de propagation d'un rayon lumineux dans le vide est la même dans toutes les directions et dans tous les systèmes de référence doués de translations rectilignes et uniformes les uns par rapport aux autres.

En prenant ce second énoncé comme postulat fondamental, on a construit une nouvelle cinématique. Examinons ce qui la rapproche et ce qui la distingue de l'ancienne.

Soient, dans l'*ancienne cinématique*, deux systèmes de référence dont l'un est doué, par rapport à l'autre, d'une translation rectiligne et uniforme. Situons, par rapport à chacun de ces systèmes, deux événements. Le premier événement se produit pour le premier système au point $x_1 y_1 z_1$ et au temps t_1, le deuxième événement, au point $x_2 y_2 z_2$ et au temps t_2. Soient de même, dans le deuxième système, (x'_1, y'_1, z'_1, t'_1) et (x'_2, y'_2, z'_2, t'_2) les caractéristiques spatiales et temporelles de nos deux événements. En posant

$$\begin{array}{llll} x_2 - x_1 = x, & y_2 - y_1 = y, & z_2 - z_1 = z, & t_2 - t_1 = t, \\ x'_2 - x'_1 = x', & y'_2 - y'_1 = y', & z'_2 - z'_1 = z', & t'_2 - t'_1 = t', \end{array}$$

et, en supposant les coordonnées spatiales rectangulaires, nous aurons des formules de transformation de la forme

$$(\mathrm{F}) \qquad \left\{ \begin{array}{l} x' = \alpha x + \beta y + \gamma z + \lambda t, \\ y' = \alpha' x + \beta' y + \gamma' z + \lambda' t, \\ z' = \alpha'' x + \beta'' y + \gamma'' z + \lambda'' t, \\ t' = t, \end{array} \right.$$

où les coefficients α, β, ..., γ'' sont ceux d'une substitution orthogonale de déterminant $+1$. Les formules (F) forment un groupe. La dernière exprime l'*invariance du temps* ou, comme l'aurait dit Newton, son caractère absolu. Si t est nul, t' l'est aussi : les deux événements sont alors *simultanés pour tout système* et, dans ces conditions, le carré de leur distance

$$x^2 + y^2 + z^2$$

est aussi un invariant. Il cesse de l'être pour deux événements non simultanés, car t n'est plus nul, et $x'^2 + y'^2 + z'^2$ diffère alors de $x^2 + y^2 + z^2$ par un polynome du second degré en t, dont le terme en t est une fonction linéaire et homogène de x, y, z.

Dans la *nouvelle cinématique*, on exprime encore l'état de translation rectiligne et uniforme des deux trièdres par des formules linéaires et homogènes, du type général

$$(\Phi) \qquad \begin{cases} x' = \alpha x + \beta y + \gamma z + \lambda t, \\ y' = \alpha' x + \beta' y + \gamma' z + \lambda' t, \\ z' = \alpha'' x + \beta y + \gamma'' z + \lambda'' t, \\ t' = \alpha''' x + \beta''' y + \gamma''' z + \lambda''' t. \end{cases}$$

On renonce donc à l'hypothèse de l'indépendance du temps et de l'espace, et l'on considère un continu espace-temps à quatre dimensions. On détermine les seconds membres des formules Φ en exprimant l'invariance de la forme quadratique

$$V^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2.$$

La cinématique ainsi construite sera conforme à l'expérience de Michelson. En effet, l'équation invariante

$$V^2 t^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

exprime bien la constance de la vitesse de propagation de la lumière dans les conditions précitées. Réciproquement, si cette équation est invariante, nous devons avoir une identité telle que

$$V^2 t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 = m(V^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2).$$

Or, dans le cas de la fixité mutuelle des deux systèmes de référence, nous devons avoir

$$t' = t, \qquad x'^2 + y'^2 + z'^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

D'après cela, on a nécessairement $m = 1$. Parmi les transformations Φ qui conservent la forme précédente, remarquons les suivantes :

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{V^2}}}, \qquad y' = y, \qquad z' = z, \qquad t' = \frac{t - \frac{vx}{V^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{V^2}}},$$

qui correspondent au cas où la translation est parallèle à Ox; v désigne alors la vitesse de cette translation.

Supposons que $\frac{v}{V}$ ou, mieux, que son carré $\frac{v^2}{V^2}$ soit négligeable. Nous pourrons, à ces formules, substituer les suivantes :

$$x' = x - vt, \qquad y' = y, \qquad z' = z, \qquad t' = t,$$

c'est-à-dire revenir à l'ancienne cinématique. C'est ce que nous ferons dans la suite.

Dans le mouvement d'entraînement de la Terre autour du Soleil, la vitesse v est environ de 30^{km} par seconde. Donc, dans ce cas, le rapport $\frac{v}{V}$ est voisin de 10^{-4}, $\frac{v^2}{V^2}$ serait donc voisin de 10^{-8}. La vitesse est plus grande pour les planètes plus rapprochées du Soleil, d'après la troisième loi de Képler, mais même pour Mercure, elle n'atteint pas 50^{km} par seconde. Nous nous en tiendrons donc, désormais, aux notions de la Cinématique classique.

5. Cela posé, admettons provisoirement l'exactitude rigoureuse des lois de Képler, qui ne sont qu'approchées. Remarquons en outre qu'elles assimilent le Soleil et chaque planète à un point : un coup d'œil jeté sur les dimensions respectives et les distances de ces astres légitime cette manière de faire; nous sommes amenés à introduire ici, pour la première fois, la notion de *point matériel*, et à donner ce nom à un corps dont les dimensions sont très petites, vis-à-vis de celles d'un système dont ce corps fait partie. Dans la question actuelle, le Soleil, ou chaque planète, ont des dimensions négligeables par rapport à celles du système solaire tout entier : on les assimile donc à des points matériels. Cette notion sera d'ailleurs précisée dans la suite.

(*A suivre.*)