NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

ÉT. DELASSUS

Sur les liaisons de roulement

Nouvelles annales de mathématiques 5e série, tome 1 (1922), p. 379-383

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1922_5_1__379_1>

[R8e]

SUR LES LIAISONS DE ROULEMENT;

PAR M. ÉT. DELASSUS.

1. Considérons un système matériel soumis à des liaisons de roulement et soient $x_1, \ldots x_n$ les paramètres

indépendants qui le définissent quand il est débarrassé des conditions de roulement, c'est-à-dire quand il est soumis aux simples conditions de contact.

Les conditions de roulement se traduiront par des équations différentielles du premier ordre

$$\begin{aligned} E_1 &= A_1\,dx_1 + \ldots + A_n\,dx_n = 0 \\ E_2 &= 0 \qquad\qquad\qquad\qquad (m < n) \\ &\cdots\cdots \\ E_m &= 0 \end{aligned}$$

et l'on sera ramené à un système holonome si ce système d'équations différentielles est complètement intégrable, c'est-à-dire peut se remplacer par un système équivalent d'équations finies. Dans le cas contraire, le système sera véritablement non holonome.

On peut bien souvent reconnaître *a priori* s'il en est ainsi sans tenter l'intégration du système des équations E. On est alors assuré qu'elle est possible et on la cherche avec la certitude de ne pas se livrer à des tentatives sans issue.

2. Un premier cas bien évident est celui de

$$m = n - 1$$

car le système E est de la forme

$$\frac{dx_1}{X_1} = \ldots = \frac{dx_n}{X_n}.$$

et admet $n - 1$ intégrales distinctes

$$f_1(x_1, \ldots, x_n) = C_1, \qquad \ldots, \qquad f_{n-1} = C_{n-1}.$$

Un disque plan de forme quelconque roulant dans un plan fixe sur une courbe fixe est ainsi un système holonome ($n = 2$, $m = 1$).

Il en est de même pour un solide roulant sur une surface fixe et dont un point décrit une courbe donnée ou dont une droite décrit une congruence donnée ou dont un plan reste tangent à une développable donnée ($n = 3, m = 2$).

3. Arrivons maintenant au cas

$$m < n - 1.$$

Si le système se ramène à un système holonome, c'est que les équations E admettent m intégrales

$$f_1(x_1, \ldots, x_n) = C_1, \qquad \ldots, \qquad f_m = C_m,$$

montrant qu'en partant d'une position quelconque $M_0(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ et suivant la liaison on ne peut atteindre que les positions M satisfaisant aux conditions

$$f_1 = f_1^0, \qquad \ldots, \qquad f_m = f_m^0,$$

donc dépendant de $n - m$ paramètres.

Réciproquement, supposons qu'il en soit ainsi. Les positions M *reliées* à M_0, c'est-à-dire telles qu'on puisse y arriver de M_0 en suivant la liaison, sont donc assujetties à vérifier m conditions pouvant, en abrégé, s'écrire

$$F_1(M_0, M) = 0, \qquad \ldots, \qquad F_m(M_0, M) = 0,$$

et exprimant sous forme finie la condition pour que deux positions soient reliées entre elles. Si deux positions M, M' sont toutes deux reliées à une troisième M_0, elles sont reliées entre elles comme on le voit en suivant le chemin M, M_0, M'.

Supposons alors qu'au lieu de considérer une position fixe M_0, on fasse dépendre cette position de m paramètres $K_1, K_2, \ldots, K_m$, cette dépendance étant choisie de façon que les équations F soient résolubles en $K_1, \ldots, K_m$, quelle que soit la position M, en donnant

$$\Phi_1(M) = K_1, \qquad \ldots, \qquad \Phi_m(M) = K_m.$$

Toute position M est reliée à la position M_0 que définissent les valeurs de K déterminée par les équations Φ. Toute position M′ reliée à M sera reliée à M_0, donc correspondra aux mêmes valeurs des K, de sorte qu'en définitive les équations F se trouvent mises sous la forme très spéciale

$$\Phi_1(M) = \Phi_1(M_0), \qquad \ldots, \qquad \Phi_m(M) = \Phi_m(M_0).$$

Si nous écrivons que deux points infiniment voisins $x_1, \ldots, x_n$ et $x_1 + dx_1, \ldots, x_m + dx_n$ sont reliées, nous obtenons alors les équations différentielles

$$d\Phi_1 = 0, \qquad \ldots, \qquad d\Phi_m = 0,$$

qui, d'après leur signification, forment un système rigoureusement équivalent au système E. Celui-ci est donc complètement intégrable et le système est holonome.

Si, comme je l'ai proposé, nous appelons « systèmes semi-holonomes » les systèmes non holonomes qui, par intégration complète de leurs équations de liaison, se ramènent à des systèmes holonomes, nous pouvons dire :

Pour qu'un système à roulement à n paramètres et m équations de roulement soit semi-holonome, il faut et il suffit que les positions que la liaison permet d'atteindre en partant d'une position initiale quelconque ne dépendent que de n — m paramètres, en remarquant que cet énoncé comprend le cas particulier $m = n - 1$ examiné au début.

Remarquons aussi que la démonstration précédente nous montrerait le résultat suivant :

Si les positions accessibles en partant d'une position initiale donnée dépendent de $n - p$ paramètres $(p < m)$, les équations de roulement admettent p combinaisons intégrables, de sorte que le système peut se ramener à $n - p$ paramètres liés par $m - p$ équations linéaires du premier ordre.

Donnons quelques exemples.

Une courbe gauche matérielle, assujettie à rouler sur une courbe gauche fixe, est un système semi-holonome, car $n = 3$, $m = 1$, et l'on voit immédiatement que les positions obtenues ne dépendent que de deux paramétres qui sont l'arc de roulement et l'angle de rotation autour de la tangente; comme

$$2 = n - m,$$

on a bien le résultat annoncé

Un solide uniquement assujetti à rouler sur une surface fixe est un système véritablement non holonome, car on a $n = 5$, $m = 2$ et partant d'une position initiale, on peut atteindre par roulement et pivotement une position quelconque. Les positions obtenues dépendent de 5 paramètres. Ce nombre est supérieur à $n - m$ qui est ici 3. Si l'on applique la seconde propriété, on voit que p est nul, de sorte que non seulement on est assuré que le système est non holonome, mais aussi que ses équations de roulement ne présentent aucune combinaison intégrable permettant de simplifier le problème.