NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Concours d'admission à l'École normale supérieure en 1922

Nouvelles annales de mathématiques 5e série, tome 1 (1922), p. 34-38

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1922_5_1__34_1>

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE EN 1922.

Mathématiques (1^re^ COMPOSITION).

On considère la famille de sphères (S), *à deux paramètres* λ, μ, *d'équation*

$$A\lambda\mu + B\lambda + C\mu + D = 0,$$

A, B, C, D *représentant les expressions ci-dessous :*

$$\begin{aligned}
A &= 2a(y+z),\\
B &= -\left[x^2+y^2+z^2+2\sqrt{2}\,ax-2a^2-k\right],\\
C &= -\left[x^2+y^2+z^2-2\sqrt{2}\,ax+2a^2-k\right],\\
D &= 2a(y-z),
\end{aligned}$$

et a *et* k *étant des constantes supposées données* ($a > 0$, k *quelconque*).

1° *Montrer que les sphères* (S) *sont orthogonales à une sphère fixe* (D) *et que le lieu géométrique de leurs centres est une quadrique* (Q).

2° *Si l'on fait varier l'un des deux paramètres* λ, μ *seul, les sphères ainsi obtenues passent par un même cercle qui engendre, lorsqu'on fait varier à son tour le second paramètre, une surface* (Σ) *à laquelle chaque sphère* (S) *est doublement tangente. Deux quelconques des cercles générateurs sont-ils sur une même sphère? Peuvent-ils être dans un même plan?*

3° *Montrer que l'on peut obtenir la surface* (Σ) *à l'aide du mode de génération que l'on vient de décrire en partant d'autres quadriques que la quadrique* (Q) *— ayant les mêmes axes qu'elle — et d'autres sphères fixes que la sphère* (D). *A combien de modes de génération ce procédé peut-il conduire? Discuter, suivant les valeurs de* k, *la nature des quadriques obtenues, et montrer que les sphères fixes correspondantes sont orthogonales deux à deux.*

4° *Étudier sommairement la forme de la courbe d'intersection de la surface* (Σ) *par le plan* xOy, *suivant les différentes valeurs de* k. *Contrôler la discussion algébrique par des considérations géo-*

métriques résultant du mode de génération de la courbe.

5° *De quoi se compose le contour apparent de la surface* (Σ) *sur le plan* xOy? *Donner un régionnement de ce plan suivant le nombre de points réels de la surface qui se projettent en un de ses points, et en déduire les différentes formes que peut prendre la surface.*

6° *Les différents modes de génération, décrits au paragraphe* (3°), *mettent en évidence plusieurs séries de cercles générateurs. Discuter leur réalité. Y a-t-il, en dehors de ces séries, d'autres cercles sur la surface* (Σ)?

(2^e^ COMPOSITION).

Deux fils parfaitement élastiques sont attachés, chacun par une de ses extrémités, en deux points diamétralement opposés d'une petite balle sphérique; les autres extrémités de ces fils sont fixées, respectivement, en deux points fixes A *et* A′, *situés sur une même verticale. On assimilera la balle à un point matériel de masse* m; *les masses des fils seront supposées négligeables, ainsi que les frottements aux points d'attache et la résistance de l'air.* On ne considérera que des positions de la balle pour lesquelles les deux fils soient tendus, *de sorte que ces fils seront toujours rectilignes. Il est, enfin, entendu qu'aucun obstacle ne s'oppose aux déplacements de la balle et des fils, entre les plans horizontaux de* A *et de* A′.

On désignera par O *le milieu de* AA′, *par* Ox *la demi-verticale descendante issue de* O, *par* Oy *une demi-horizontale fixe issue de* O, *par* A *celui des deux points fixes qui est sur* Ox, *par* M *une position* *quelconque de la balle. On posera* $OA = a$, $AM = \rho$, $A'M = \rho'$. *On admettra qu'en vertu de leur élasticité, qui est la même pour tous deux, les fils exercent sur la balle des forces mesurées respectivement par* $k\frac{\rho - c}{c}$ *et* $k\frac{\rho' - c'}{c'}$, *k étant une constante qui ne dépend que de la nature des fils, et c et c' étant les longueurs auxquelles les deux fils se réduiraient respectivement s'ils cessaient d'être tendus.*

1° On supposera, dans tout le problème, que $c + c' = a$, et que la position d'équilibre de la balle est en O. *Quelle est la relation entre m, k, c, c' et l'accélération g de la pesanteur qui traduit cette dernière condition?*

2° *Montrer que la balle, écartée de* O *et abandonnée sans vitesse en un point de* AA', *suffisamment voisin de* O, *exécute des oscillations isochrones. Calculer c, c' et k en fonction de a, m, g et de la longueur λ du pendule simple dont les petites oscillations seraient isochrones aux oscillations de la balle considérées. On désignera, s'il y a lieu, par* T *la durée d'une oscillation simple de ce pendule.*

3° *Soit* F *la résultante des actions qui s'exercent sur la balle, quand elle est placée en un point quelconque* M *du plan xOy, et soient x, y les coordonnées de ce point. Montrer que le champ des forces* F *dérive d'une fonction de forces* $U(x, y)$; *et que, si l'on néglige des infiniment petits d'ordre supérieur à 2 par rapport à la distance* OM, *on peut prendre pour expression approchée de* $U(x, y)$, au voisinage de O, *le polynome*

$$U_0(x, y) = \frac{k}{a}y^2 - \frac{k}{2}\left(\frac{1}{c} + \frac{1}{c'}\right)(x^2 + y^2).$$

Étudier sommairement les courbes de niveau et les lignes de forces du champ, en adoptant cette valeur approchée de la fonction de forces, et en supposant $\lambda = \frac{a\sqrt{2}}{4}$.

4° *Avec la même approximation pour* $U(x, y)$, *et la même valeur pour* λ, *étudier le mouvement que prend la balle, quand on l'abandonne sans vitesse en un point quelconque* $x = p$, $y = q$ *du plan* xOy, *voisin de* O.

5° *On lance la balle, à partir de* O, *dans la direction* Oy, *avec la vitesse* $v_0 = \sqrt{17\lambda g}$. *De quel angle maximum le fil supérieur s'écartera-t-il de la verticale? — On supposera encore* $\lambda = \frac{a\sqrt{2}}{4}$, *mais l'approximation admise pour* $U(x, y)$ *dans les deux questions précédentes cesse ici d'être valable.*