NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

GEORGES VALIRON

Sur les fonctions analytiques d'une variable réelle

Nouvelles annales de mathématiques 5e série, tome 1 (1922), p. 321-329

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1922_5_1__321_0>

[D2bα]

SUR LES FONCTIONS ANALYTIQUES D'UNE VARIABLE RÉELLE;

PAR M. GEORGES VALIRON.

Dans la plupart des Traités d'Analyse, la théorie des fonctions analytiques est faite directement dans le cas des fonctions de variables complexes. Il semble être utile de montrer dans l'enseignement, au moins dans le cas d'une seule variable, ce que l'on peut obtenir par les procédés élémentaires lorsqu'on suppose les éléments réels; on met ainsi en évidence ce que l'on gagne ensuite à introduire la variable complexe. C'est ce que je veux faire dans cette Note qui n'a aucune prétention à l'originalité.

1. Avec M. Denjoy, nous appellerons *segment* a, b l'ensemble des points x tels que $a \leqq x \leqq b$, et *intervalle* a, b l'ensemble des points tels que $a < x < b$. La proposition suivante se déduit aisément des propriétés démontrées dans tous les cours :

I. *Si la série entière*

$$f(x) = f(0) + x f'(0) + \ldots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \ldots$$

admet un intervalle de convergence non nul $-\mathrm{R}$, R *et si* $\mathrm{M}(\rho)$ *désigne la somme de la série des valeurs absolues pour* $\rho < \mathrm{R}$, *on a, pour* $|x_0| < \rho$,

$$(1) \qquad |f^{(n)}(x_0)| < \frac{\rho \mathrm{M}(\rho)}{(\rho - |x_0|)^{n+1}} n!,$$

$f(x)$ est donc développable en série de Taylor suivant les puissances de $(x - x_0)$ dans l'intervalle

$$x_0 - R + |x_0|, \qquad x_0 + R - |x_0|.$$

La définition élémentaire des fonctions analytiques est la suivante (Goursat, Chap. IX) : *une fonction $f(x)$ est dite analytique sur le segment a, b lorsqu'elle est développable en série de Taylor dans le voisinage de tout point x_0 du segment*, c'est-à-dire lorsque, x_0 appartenant au segment (a, b), $f(x)$ est la somme de sa série de Taylor

$$(2)\quad f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \ldots + \frac{(x - x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + \ldots$$

dans un intervalle comprenant le point x_0 à son intérieur. Cet énoncé un peu vague est aisé à préciser en utilisant la proposition I : $f(x)$ coïncide avec la somme $F(x)$ de la série (2) dans toute la portion de l'intervalle de convergence de cette série qui appartient au segment a, b. Soit en effet R_0 le rayon de convergence de la série (2) (qui est positif par hypothèse), supposons par exemple $x_0 + R_0 < b$ et considérons les points de l'intervalle x_0, $x_0 + R_0$. $F(x)$ et $f(x)$ sont égaux par hypothèse dans le voisinage de x_0 ; or il est impossible que, pour un nombre x_1 de l'intervalle $x_0, x_0 + R_0$, $f(x_1)$ soit différent de $F(x_1)$ tandis que $f(x)$ serait égal à $F(x)$ pour x inférieur à x_1, car les deux fonctions $F(x)$ et $f(x)$ sont continues au point x_1 ; il est de même impossible que $F(x)$ égale $f(x)$ pour x inférieur ou égal à x_1, tandis que $F(x)$ et $f(x)$ seraient différents pour x supérieur à x_1, car les deux fonctions sont développables en série de Taylor au point x_1, elles coïncident à gauche de ce point, elles ont donc mêmes dérivées en ce point et par suite même développement de Taylor.

En se rappelant que, lorsque la série entière (2) converge pour l'une des limites de l'intervalle de convergence, sa somme est encore continue jusqu'en ce point, on voit que la définition donnée ci-dessus se complète de la façon suivante :

II. *Lorsqu'une fonction $f(x)$ est analytique sur un segment a, b, elle est égale à la somme de son développement de Taylor* (2) *relatif à un point x_0 de a, b en tout point de a, b où ce développement converge.*

Désignons par $R(x_0)$ le rayon de convergence de la série de Taylor (2); il résulte de ce qui précède que, en tout point du segment $x_0 - R'(x_0)$, $x_0 + R'(x_0)$, $\left[R'(x_0) = \frac{1}{3}R(x_0)\right]$ appartenant à a, b, la série de Taylor de $f(x)$ a un rayon de convergence au moins égal à $2R'(x_0)$. Posons

$$a_1 = a + R'(a), \quad a_2 = a_1 + R'(a_1), \quad \ldots, \quad a_p = a_{p-1} + R'(a_{p-1}),$$

les nombres a_1, a_2, ..., a_p, ... forment une suite croissante. Je dis qu'il existe un entier q pour lequel $a_q \geqq b$. Car dans le cas contraire, la suite infinie des nombres croissants a_p aurait une limite α inférieure ou égale à b et $R'(a_p)$ tendrait vers zéro lorsque p croîtrait indéfiniment. Or, c'est impossible, car $R'(\alpha)$ est positif, donc en tout point du segment $\alpha - R'(\alpha)$, α le rayon de convergence de la série de Taylor est au moins $2R'(\alpha)$. D'où ce résultat, qui est d'ailleurs une conséquence immédiate du théorème général de Borel-Lebesgue sur les intervalles :

III. *On peut décomposer le segment a, b en un nombre fini de segments partiels par des points de division a_1, a_2, ..., a_{q-1}, tels que, en tout point* *appartenant à l'un de ces segments a_i, a_{i+1}, le rayon de convergence de la série de Taylor de $f(x)$ soit au moins égal à $2(a_{i+1}-a_i)$.*

Au point a_i le rayon de convergence $R(a_i)=3R'(a_i)$ est au moins le double des nombres $a_{i+1}-a_i$ et a_i-a_{i-1}; si $M(a_i)$ est la somme de la série

$$|f(a_i)|+2R'(a_i)|f'(a_i)|+\ldots+[2R'(a_i)]^n\frac{|f^{(n)}(a_i)|}{n!}+\ldots$$

la proposition I montre que, pour $a_{i-1}\leqq x\leqq a_{i+1}$, on aura

$$|f^{(n)}(x)|<\frac{4M(a_i)n!}{\left[\frac{R'(a_i)}{2}\right]^n}.$$

et par suite, si M est le plus grand des nombres $4M(a_i)$ $(i=1, 2, \ldots, q-1)$ et $2r$ le plus petit des nombres $R'(a_i)$, on voit que, quels que soient l'entier n positif ou nul et le nombre x appartenant au segment a, b, on a l'inégalité

$$(3)\qquad |f^{(n)}(x)|<\frac{M}{r^n}n!$$

C'est une condition nécessaire pour que la fonction $f(x)$ soit analytique; elle est aussi suffisante, car elle assure que le reste de la formule de Taylor

$$(4)\quad f(x)=f(x_0)+(x-x_0)f'(x_0)+\ldots$$
$$+\frac{(x-x_0)^n}{n!}f^{(n)}(x_0)+\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}[x_0+\theta(x-x_0)]$$

tend vers zéro lorsque n croît indéfiniment, pourvu que $|x-x_0|<r$. Donc :

IV. *La condition nécessaire et suffisante pour que $f(x)$ soit analytique sur le segment a, b est qu'il existe deux nombres* M *et r tels que la fonction* *et ses dérivées vérifient l'inégalité* (3) *sur tout le segment* a, b.

De cette proposition et de la proposition II, on déduit que, *si une fonction* $f(x)$ *satisfait aux inégalités* (3) *sur un segment* a, b *et si* x_0 *est un point du segment* a, b, $f(x)$ *est la somme de sa série de Taylor relative à* x_0 *en tout point de* a, b *où cette série converge*. L'étude du reste de la série de Taylor est supprimée. Ainsi la fonction $(1+x)^m$ vérifie la condition (3) sur un segment a, b pourvu que a soit supérieur à -1, sa série de Mac-Laurin étant convergente dans l'intervalle -1, $+1$, on a, dans cet intervalle,

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2}x^2 + \ldots.$$

On voit quel est l'intérêt pratique de la condition (3). La définition généralement adoptée pour les fonctions analytiques, donnée plus haut, est plus commode que la condition (3) pour montrer que certaines opérations effectuées avec un nombre fini de fonctions analytiques conduisent, sous certaines conditions, à une fonction analytique (*voir* GOURSAT, Chap. IX). Je signalerai de suite que la condition (3) est cependant utile lorsqu'on s'occupe d'une infinité de fonctions, parce qu'elle permet de comparer la façon dont ces fonctions sont analytiques. On peut dire que les fonctions $f_p(x)$ d'une suite sont *également analytiques* sur un segment a, b lorsqu'il existe deux nombres fixes M et r, tels que, quels que soient les entiers $n(\geqq 0)$ et p et quel que soit x appartenant à a, b, on a

$$(5) \qquad |f_p^{(n)}(x)| < \frac{M}{r^n} n!$$

On montre alors, en utilisant un procédé dû à

M. Montel (*voir* les *Leçons sur les séries de polynomes*) que, de la suite des fonctions $f_p(x)$ on peut extraire une autre suite qui converge uniformément sur a, b vers une fonction limite, analytique sur a, b [et vérifiant la condition (3) où le signe $<$ est remplacé par $\leqq$ avec les valeurs de M et r entrant dans (5)]. On en déduit, en utilisant la proposition VI donnée ci-après, que, si une suite de fonctions également analytiques sur a, b converge uniformément en une infinité de points du segment, elle converge uniformément sur tout a, b vers une fonction analytique sur a, b. La propriété n'est plus vraie si l'on ne fait aucune hypothèse sur la façon dont les fonctions de la suite sont analytiques; par exemple, la série de Fourier représentant entre $-\pi$ et $+\pi$ une ligne brisée dont les extrémités ont la même ordonnée est une série de fonctions analytiques sur le segment $-\pi$, $+\pi$, uniformément convergente sur tout ce segment.

2. La proposition II met de suite en évidence une propriété fondamentale des fonctions analytiques :

V. *Si $f(x)$ est une fonction analytique sur le segment a, b, les dérivées de cette fonction ne peuvent s'annuler simultanément en un point du segment a, b, à moins que $f(x)$ ne se réduise à une constante.*

Car si, x_1 étant un point du segment a, b, les dérivées $f^{(p)}(x_1)$ sont toutes nulles, le développement de Taylor au point x_1 se réduit à son terme indépendant de $x-x_1$, $f(x_1)$, son rayon de convergence est infini, donc $f(x)$ est constant et égal à $f(x_1)$ sur tout le segment a, b.

On peut donner à cette proposition les formes équivalentes suivantes :

1° Deux fonctions analytiques sur un même segment, qui sont égales ainsi que toutes leurs dérivées en un point du segment, coïncident sur ce segment.

2° Une fonction analytique sur un segment est complètement déterminée lorsqu'on donne sa valeur et les valeurs de ses dérivées en un point de ce segment.

3° Si $f(x)$ est une fonction analytique sur a, b et n'est pas constante, à chaque point x_0 du segment en lequel $f(x)$ s'annule correspond un nombre q qui est l'ordre de la première dérivée non nulle en ce point. La formule de Taylor limitée

$$f(x) = \frac{(x-x_0)^q}{q!}\left\{ f^{(q)}(x_0) + \frac{x-x_0}{q+1} f^{q+1}\left[x_0 + \theta(x-x_0)\right]\right\}$$

montre qu'on peut trouver un intervalle $x_0 - \alpha$, $x_0 + \alpha$ dans lequel $f(x)$ ne s'annule qu'au point x_0. On dit que x_0 est un zéro d'ordre q de $f(x)$ et l'on voit que les zéros sont des points isolés. Si chaque zéro est compté un nombre de fois égal à son ordre, le nombre des zéros est fini sur a, b. Car, s'il y en avait une infinité, ils auraient un point limite ξ appartenant à a, b; ce point ξ ne pourrait qu'être un zéro d'ordre fini de $f(x)$, il y aurait dans son voisinage une infinité de zéros, ce qui est impossible. Une fonction analytique sur un segment a, b ne s'annule donc qu'un nombre fini de fois sur ce segment. Par suite :

VI. *Deux fonctions analytiques sur un segment a, b qui sont égales en une infinité de points de ce segment sont identiques.*

Autrement dit, une fonction analytique sur un segment a, b est complètement déterminée par les valeurs qu'elle prend en une infinité de points de ce segment.

Puisque la dérivée $f'(x)$ étant analytique sur le même segment a, b ne peut y avoir qu'un nombre fini de zéros, on obtient encore cette proposition :

VII. *Une fonction analytique sur un segment a, b est monotone par sections*, c'est-à-dire qu'on peut partager a, b en un nombre fini d'intervalles partiels dans lesquels $f(x)$ est ou bien croissante ou bien décroissante.

Il résultera de là que les courbes analytiques seront des courbes ordinaires, susceptibles d'être représentées graphiquement. Elles pourront servir à délimiter les régions auxquelles s'appliquent les considerations élementaires sur les transformations d'integrales curvilignes en intégrales doubles, etc.

Toutes ces propriétés découlent de la proposition V, elles restent vraies pour toutes les classes de fonctions indéfiniment dérivables auxquelles cette proposition s'applique. M. Denjoy a montré récemment (*Comptes rendus*, 1921 et 1922) que les fonctions indéfiniment dérivables sur un segment et telles que, M_n désignant la borne superieure de $|f^{(n)}(x)|$ sur ce segment, la série

$$\sum M^{-\frac{1}{n}} \tag{6}$$

est divergente, ne peuvent s'annuler ainsi que leurs dérivées en un point du segment sans être identiquement nulles; toutes les propriétés précédentes sont vraies pour ces fonctions. Les fonctions analytiques rentrent dans cette classe plus générale, car, d'après la condition (3), ce sont les fonctions pour lesquelles $M^{-\frac{1}{n}}$ est supérieur à $\frac{k}{n}$; les fonctions non analytiques telles que la série (6) diverge ont été appelées *fonctions quasi analytiques*. Il résulte des travaux de M. Borel qu'il existe effectivement des fonctions quasi analytiques sur un segment, qui ne sont analytiques sur aucun segment intérieur.

C'est dans l'étude des fonctions analytiques définies par le prolongement d'une série de Taylor que la variable complexe joue vraiment son rôle. Lorsqu'on se borne à la variable réelle, on peut effectuer le prolongement jusqu'aux premiers points singuliers que l'on rencontre à droite et à gauche du point de départ (on peut même les dépasser si ce sont des pôles ou points essentiels). On définit ainsi une fonction analytique *dans un intervalle* (en ce sens qu'elle est analytique sur tout segment intérieur à cet intervalle), ou analytique dans une suite d'intervalles adjacents; mais on ne peut, en général, rattacher l'une à l'autre des fonctions analytiques réelles $f(x)$, $g(x)$ définies dans des intervalles a, b et c, d non adjacents, qui apparaissent nettement comme des branches issues d'un même tronc lorsqu'on introduit la variable complexe. Notons cependant qu'il pourra exister dans certains cas une fonction quasi analytique sur un segment ayant l'une de ses extrémités entre a et b, l'autre entre c et d et coïncidant respectivement en ces points avec les fonctions $f(x)$ et $g(x)$ (deux fonctions quasi analytiques coïncident en un point lorsqu'elles sont égales en ce point ainsi que leurs dérivées). Il pourra alors sembler légitime de considérer $f(x)$ et $g(x)$, branches analytiques d'une même fonction quasi analytique, comme constituant des branches d'une même fonction analytique réelle, indépendamment de la possibilité de passer de $f(x)$ à $g(x)$ par un prolongement analytique dans le plan complexe.