Certificats de calcul différentiel et intégral

Nouvelles annales de mathématiques 5e série, tome 1 (1922), p. 269-276

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1922_5_1__269_1>

CERTIFICATS DE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — 1° Question de cours. — *Définir l'aire d'une surface courbe, et calculer cette aire quand* *les coordonnées rectangulaires d'un point quelconque de la surface sont exprimées en fonction de deux paramètres.*

2° Problème. — *Soient Ox, Oy, Oz trois axes de coordonnées rectangulaires. Former l'équation aux dérivées partielles des surfaces* S *telles que le point* O *soit équidistant d'un point quelconque* M *de l'une des surfaces* S *et du point d'intersection de la normale* N *en* M *à la surface* S *avec le plan xOy. Trouver et définir géométriquement une intégrale complète. Intégrer le système différentiel des caractéristiques et les définir géométriquement. Une courbe caractéristisque peut-elle être ligne asymptotique ou ligne de courbure d'une surface* S ?

Solution du problème. — Avec les notations habituelles, l'équation aux dérivées partielles cherchée est

$$(1) \qquad (p^2+q^2)z+2(px+qy)-z=0.$$

D'après les propriétés élémentaires de la parabole, une surface S dépendant de deux paramètres, donc une intégrale complète de l'équation (1), est formée par des cylindres paraboliques admettant le point O comme foyer et dont les génératrices sont parallèles au plan xOy, ou par les paraboloïdes de révolution de foyer O et dont l'axe est dans le plan xOy. On vérifie ces deux résultats ou on les trouve directement sur le système différentiel définissant les caractéristiques de l'équation (1). Sur le même système, on voit que ces caractéristiques sont des paraboles pouvant être définies comme les sections des cylindres paraboliques par les plans passant par la directrice de la section droite contenant Oz. Donc, sauf dégénérescence, une courbe caractéristique ne peut être ligne asymptotique d'une surface (S) et, si elle est ligne de courbure, c'est nécessairement une parabole dont le plan contient Oz, de foyer O et dont l'axe est dans le plan xOy.

Épreuve pratique. — 1° *Calculer l'intégrale définie*

$$\int_0^1 \frac{dx}{(1+x)\sqrt[3]{x^2(1-x)}}.$$

2° *Soit l'équation linéaire du second ordre*

$$(1 - x^2) y'' - x y' + 9 y = 5 x \sqrt{1 - x^2}.$$

Sachant que l'équation privée du second membre admet comme intégrale particulière un polynome, trouver l'intégrale générale de l'équation complète.

Solution. — 1° L'intégrale proposée est d'un type classique pour le calcul par la méthode des résidus. Chacune des trois déterminations de la fonction de variable complexe

$$\frac{1}{(1 + z)\sqrt[3]{z^2(1 - z)}}$$

est une fonction uniforme, si l'on fait une coupure sur l'axe réel entre les deux points $z = 0$ et $z = 1$. Et l'intégrale de l'une de ces fonctions uniformes est nulle sur un chemin qui entoure la coupure et le point $z = -1$. Donc l'intégrale de la fonction considérée le long d'un lacet entourant les deux points $z = 0$ et $z = 1$ est égale à $-2\pi . i R$, R désignant le résidu de la même fonction $z = -1$. D'où, après une réduction simple, la valeur $\dfrac{2^{\frac{2}{3}} \pi}{\sqrt{3}}$. La même intégrale peut d'ailleurs se ramener à une intégrale de différentielle rationnelle par le changement de variable :

$$\frac{x}{1 - x} = t^3.$$

2° Par substitution d'un polynome à coefficients indéterminés, on obtient de suite une première intégrale de l'équation sans second membre :

$$4x^3 - 3x.$$

Une seconde intégrale de la même équation est donnée par deux quadratures dont l'une est immédiate, et une intégrale particulière de l'équation complète est donnée par la méthode de variation des constantes. D'où l'intégrale générale

$$y = A(4x^3 - 3x) + B(4x^2 - 1)\sqrt{1 - x^2} + x\sqrt{1 - x^2},$$

A et B sont des constantes d'intégration.

La forme des intégrales indéfinies à calculer par la méthode précédente, ou même la forme de l'équation proposée, conduisent au changement de variable

$$x = \sin t, \qquad \sqrt{1-x^2} = \cos t.$$

L'équation transformée

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 9y = \frac{5}{2} \cdot \sin 2t$$

admet comme intégrale générale

$$y = A \cos 3t + B \sin 3t + \frac{1}{2} \sin 2t.$$

(Lille, juillet 1920.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — *On considère un système d'axes rectangulaires :* 1° *Vérifier que les surfaces intégrales* S *de l'équation aux dérivées partielles* (E) *du premier ordre :*

$$\text{(E)} \qquad (1+p^2+q^2)(bx-ay)-(px+qy-z)[p(b-y)-q(a-x)] = 0,$$

jouissent de la propriété suivante : sur une surface (S) *les courbes* (C) *le long desquelles le plan tangent à* (S) *demeure à une distance constante de l'origine sont aussi les courbes de contact des cônes circonscrits à* (S), *ayant leur sommet sur la droite* (D) :

$$\text{(D)} \qquad \begin{cases} x = a, \\ y = b. \end{cases}$$

2° *Montrer, sans calculs, que l'équation* (E) *admet comme intégrale complète une famille de cônes ayant leur sommet sur* (D) *et que les courbes* (C) *relatives à toutes les surfaces intégrales de* (E) *sont les courbes d'un complexe. Achever l'intégration de* (E). *Que peut-on dire encore des courbes* (C)?

3° *Transformer l'équation* (E) *par la transformation définie par les relations*

$$x' = p, \qquad y' = q, \qquad z' = px + qy - z.$$

La nouvelle équation (E′) *que l'on obtient ainsi est linéaire. Intégrer* (E′) *et montrer quelle est la relation géométrique entre la congruence caractéristique de cette équation et l'intégrale complète de* (E) *précédemment trouvée.*

Solution. — 1° Les deux familles de lignes envisagées dans l'énoncé sont définies par les relations

$$d\frac{(px+qy-z)^2}{1+p^2+q^2}=0, \qquad (a-x)\,dp+(b-y)\,dq=0,$$

l'équation (E) est la condition de compatibilité entre ces deux relations.

2° Les cônes ayant leur sommet sur (D) et circonscrits aux sphères de centre O forment l'intégrale complète demandée. Les courbes (C) sont caractéristiques de (E); ce sont des cercles, lignes de courbure des surfaces (S).

3° L'équation (E′) est

$$(1+x'^2+y'^2)(bp'-aq')-z'[x'(b-q')-y'(a-x')]=0;$$

sa congruence caractéristique est constituée par des courbes planes, polaires réciproques des cônes précédemment considérés.

Épreuve pratique. — *Calculer à* 10^{-3} *près l'intégrale* $\int_0^\infty \frac{x^2\,dz}{x^4-\sqrt{1,153}\,x^2+1}$. *On calculera d'abord l'intégrale* $\int \frac{z^2\,dz}{z^4-\sqrt{1,153}\,z^2+1}$ *prise le long d'un contour formé d'un demi-cercle de centre* O *et d'une partie de l'axe des x.*

Solution. — En posant $2\cos\alpha=\sqrt{1,153}$, on trouve

$$\frac{\pi}{4\sin\frac{\alpha}{2}}$$

que l'on calcule par les tables.

(Dijon, juin 1920.)

Épreuve théorique. — I. *x étant la variable indépendante et y la fonction inconnue, on considère l'équation*

$$(1) \qquad y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0,$$

et l'on demande :

(A) *Quelle relation doit exister entre* P *et* Q *pour que l'équation* (1) *admette deux intégrales linéairement distinctes dont l'une est la dérivée de l'autre, et d'intégrer dans ce cas l'équation;*

(B) *D'exprimer dans la même hypothèse, à l'aide d'une même fonction arbitraire, les couples de fonctions* P *et* Q *satisfaisant à la relation demandée ci-dessus;*

(C) *Si l'équation* (1) *peut admettre, dans les conditions de* (A) *deux couples d'intégrales y_1 et y'_1, y_2, et y'_2, tels que y_1, et y_2 soient linéairement distinctes.*

II. *Étant donnée l'équation*

$$(2) \quad (1+x^2)(1-x^2)^2y'' - 4x(1-x^2)y' + (1-3x^2)y = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}(1-x^4)^2e^x,$$

vérifier que l'équation sans second membre possède la propriété énoncée au paragraphe (A) *et intégrer complètement l'équation* (2).

Indications pour la solution. — I. (A) On doit avoir

$$(3)\; y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0, \qquad y''' + P(x)y'' + Q(x)y' = 0,$$

ou les conditions équivalentes

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0, \qquad P'(x)y' + Q'(x)y = 0.$$

On en tire aisément la condition demandée

$$Q'P'' - P'Q'' + Q'^2 - PP'Q' + QP'^2 = 0,$$

et, pour y, la valeur

$$(4) \qquad y = ce^{-\int \frac{Q'}{P'}dx};$$

le cas ou $\frac{P'}{Q'}$ serait constant ($y = ce^{kx}$) doit être exclu.

(B) Les relations (3) donnent immédiatement P et Q exprimés à l'aide de la seule arbitraire y (le cas de $y = ce^{kx}$ étant toujours exclu).

(C) Soit

$$y_2 = k_1 y_1 + k_2 y'_1;$$

on doit avoir

$$y'_2 = k_1 y'_1 + k_2 y''_1 = c_1 y_1 + c_2 y'_1,$$

d'où

$$c_1 y_1 + (c_2 - k_1) y'_1 - k_2 y''_1 = 0.$$

On en conclut aisément que P et Q doivent être constants et, cette condition étant vérifiée, on obtiendra une infinité de couples répondant à la question. Si les racines de l'équation caractéristique sont distinctes il faudra prendre

$$y_1 = \alpha_1 e^{r_1 x} + \beta_1 e^{r_2 x}, \qquad y_2 = \alpha_2 e^{r_1 x} + \beta_2 e^{r_2 x},$$

avec

$$\alpha_1 \beta_1 \neq 0, \qquad \alpha_2 \beta_2 \neq 0, \qquad \alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1 \neq 0;$$

si ces racines sont égales,

$$y_1 = e^{rx}(\alpha_1 + \beta_1 x), \qquad y_2 = e^{rx}(\alpha_2 + \beta_2 x),$$
$$\beta_1 \neq 0, \qquad \beta_2 \neq 0, \qquad \alpha_1 \beta_2 - \beta_1 \alpha_2 \neq 0.$$

II. La vérification n'offre pas de difficultés et la fonction y de l'égalité (4) est

$$c\sqrt{1 - x^2}.$$

On en déduit la solution générale de l'équation proposée

$$y = \frac{e^x (1 - x)^2}{\sqrt{1 - x^2}} + c_1 (1 - x^2)^{\frac{1}{2}} - c_2 x (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

Épreuve pratique. — *Calculer par la méthode des résidus, en utilisant des rectangles dont un côté est parallèle à l'axe des quantités réelles, les intégrales suivantes prises le long de l'axe des quantités réelles, a désignant une quantité complexe $\alpha + i\beta$ dont la partie réelle α est* *comprise entre* 0 *et* 1 :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax}(1+e^{2x})}{(1+e^{x})(1+e^{3x})}\,dx, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax}\,dx}{\left(1+e^{\frac{x}{2}}\right)^{2}}.$$

Indications. — Pour la première intégrale on intégrera le long du rectangle de hauteur 2π et de base $-l$, $+l$ sur l'axe réel et l'on fera tendre l vers l'infini. On obtient ainsi :

$$I = \frac{2\pi}{3\sin a\pi}\left\{\frac{1}{\sqrt{3}}\cos\frac{(1-4a)}{6}\pi + 1 - a\right\}.$$

Pour la seconde intégrale on trouvera de même (rectangle de hauteur 4π)

$$I = \frac{2(1-2a)\pi}{\sin 2a\pi}.$$

(Nancy, juin 1920.)