NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

GEORGES BOULIGAND

Sur un théorème de Liouville

Nouvelles annales de mathématiques 5e série, tome 1 (1922), p. 266-267

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1922_5_1__266_1>

[$P^1 3b$]

SUR UN THÉORÈME DE LIOUVILLE;

PAR M. GEORGES BOULIGAND.

Dans un récent article [1], M. Paul Montel a donné une démonstration, aussi originale que simple, de ce théorème classique :

La seule surface réelle dont tous les points sont des ombilics est la sphère.

Il m'a semblé intéressant de rattacher, à cette proposition, un théorème célèbre de Liouville :

Les seules transformations conformes de l'espace à trois dimensions sont les similitudes, les inversions,

[1] *Nouv. Ann. de Math.*, octobre 1922, p. 21.

et celles qui naissent de leur composition, toujours réductibles d'ailleurs, *sinon à une similitude, du moins à une similitude* (qui peut se réduire à la transformation identique) *suivie d'une inversion.*

En effet, l'hypothèse de conformité entraîne successivement la conservation des systèmes triples orthogonaux, celle des lignes de courbure et, par suite, celle des ombilics. D'après le théorème précédent, il y aura donc aussi conservation des sphères (sauf réduction à des plans).

La démonstration s'achève alors ainsi : un système triple orthogonal composé, dans chaque famille, de plans parallèles, donnera naissance ou bien à un système de même nature, ou bien à un nouveau système triplement orthogonal dont chaque famille est constituée par des sphères.

Dans le premier cas, la transformation conforme cherchée est nécessairement une similitude.

Dans le second cas, deux sphères d'une même famille font entre elles un angle nul. Elles sont donc tangentes. L'une des familles est formée de sphères dont l'ensemble constitue un faisceau : toutes ces sphères sont donc tangentes en un même point O. Leurs trajectoires orthogonales sont les cercles tangents en O à la ligne des centres. On en conclut que les sphères des deux autres familles passent aussi par le point O, et que chacune de ces familles est formée, comme la précédente, de sphères tangentes en O. Une inversion de pôle O transforme alors ce triple système de sphères en un triple système de plans, qui correspond au système triple initial (de même nature) par une similitude. La transformation étudiée peut donc s'obtenir en composant cette similitude avec l'inversion précédente.