A. GULDBERG

Un théorème du calcul des probabilités

Nouvelles annales de mathématiques 5e série, tome 1 (1922), p. 251-254

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1922_5_1__251_1>

[J2a]

UN THÉORÈME DU CALCUL DES PROBABILITÉS;

PAR M. A. GULDBERG,

Professeur à l'Université de Christiania.

La probabilité d'un événement E est p, celle de l'événement contraire est q; on fait μ épreuves dans les mêmes conditions. Le nombre d'arrivées le plus probable des E est, d'après le théorème de Bernoulli, μp (*voir* J. BERTRAND, *Calcul des Probabilités*, p. 71).

Dans un Mémoire [1] intéressant, mais peu connu, M. T.-C. Simmons a établi le théorème :

« Si le nombre d'arrivées le plus probable de l'évé-

[1] *Proceedings of the London Mathematical Society*, t. 26, p. 290.

nement E, dont la probabilité est p, est dans μ épreuves *un*, il est plus probable que le nombre d'arrivées de E soit *plus petit* que *plus grand* que *un*. »

M. Simmons énonce aussi son théorème de la manière suivante :

« Si un événement doit arriver b fois et ne doit pas arriver a fois, $a > b$, dans les mêmes conditions, et si on fait μ épreuves, où μ est un multiple de $(a + b)$, la probabilité pour que l'événement arrive un nombre de fois plus petit que $\mu \frac{b}{a+b}$ est plus grande que la probabilité pour que l'événement arrive un nombre de fois plus grand que $\mu \frac{b}{a+b}$. »

M. Simmons a seulement réussi à établir ce théorème dans le cas où $b = 1$. Son analyse est assez compliquée et longue (33 pages); il pense que le théorème est vrai pour toutes les valeurs de $b < a$. Le théorème de M. Simmons est, il me semble, intéressant et mérite d'être connu. Peut-être un jeune géomètre en pourra-t-il donner la démonstration complète.

Dans les lignes qui suivent, je me permets de faire quelques remarques qui se rattachent à ce problème.

Soit x une quantité pouvant prendre les valeurs distinctes positives x_1 avec la probabilité p_1, x_2 avec la probabilité p_2, $\ldots$, x_k avec la probabilité p_k, en sorte que

$$p_1 + p_2 + \ldots - p_k = 1.$$

La valeur moyenne m de la quantité x est définie par l'expression

$$m = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \ldots + p_k x_k.$$

Soient x'_1, x'_2, $\ldots$, x'_l les valeurs de la quantité x

qui sont plus petites que m et $p'_1, p'_2, \ldots, p'_r$ les probabilités correspondantes, et soient $x''_1, x''_2, \ldots, x''_t$ les valeurs de la quantité x qui sont plus grandes que m et $p''_1, p''_2, \ldots, p''_t$ les probabilités correspondantes. La valeur moyenne relative aux valeurs de la quantité x qui sont $< m$ est définie par l'expression

$$m_1 = \frac{p'_1 x'_1 + p'_2 x'_2 + \ldots + p'_r x'_r}{p'_1 + p'_2 + \ldots + p'_r}.$$

La valeur moyenne relative aux valeurs de la quantité x qui sont $> m$ est définie par l'expression

$$m_2 = \frac{p''_1 x''_1 + p''_2 x''_2 + \ldots + p''_t x''_t}{p''_1 + p''_2 + \ldots + p''_t}.$$

Soit

$$M_1 = \sum_1^r p'_i(m - x'_i),$$

la sommation est étendue aux valeurs de x, qui sont $< m$, et soit

$$M_2 = \sum_1^t p''_i(x''_i - m),$$

la sommation est étendue aux valeurs de x, qui sont $> m$.

On a

$$M_2 = M_1$$

car

$$M_2 - M_1 = \sum_1^k p_i(x_i - m) = \sum_1^k p_i x_i - m = 0.$$

De l'égalité

$$\sum_1^r p'_i(m - x'_i) = \sum_1^t p''_i(x''_i - m)$$

ou

$$m\sum_1^r p'_i - \sum_1^r p'_i x'_i = \sum_1^t p''_i x''_i - m\sum_1^t p''_i$$

on tire, si

(1) $$m - m_1 < m_2 - m,$$

l'inégalité

(2) $$\sum_1^r p'_i > \sum_1^t p''_i.$$

On a ainsi la proposition suivante :

« Si la différence entre la valeur moyenne m de la quantité x et la valeur moyenne relative m_1 aux valeurs de x plus petites que m est plus petite que la différence entre la valeur moyenne relative m_2 aux valeurs de x plus grandes que m et la valeur moyenne m de x, la probabilité pour que la quantité x prenne une valeur plus petite que m est plus grande que la probabilité que x prenne une valeur plus grande que m. »

Si le signe d'inégalité en (1) est renversé, le signe d'inégalité (2) est renversé. Si

$$m - m_1 = m_2 - m$$

on a

$$\sum_1^r p'_i = \sum_1^t p''_i.$$