Nouvelles annales de mathématiques

Georges Bouligand

Transformations linéaires, volumes et déterminants

Nouvelles annales de mathématiques 5e série, tome 1 (1922), p. 237-251
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1922_5_1__237_0>

[B2a]

TRANSFORMATIONS LINÉAIRES, VOLUMES ET DETERMINANTS;

Par M. Georges BOULIGAND,
Professeur à l'Université de Poitiers.

1. C'est Leibniz qui, le premier, a rencontré la notion de déterminant, en étudiant le problème de l'élimination de n inconnues entre $n+1$ équations linéaires : la solution s'obtient en annulant un polynome entier et homogène des coefficients de ces équations. Les termes de ce polynome peuvent se déduire de l'un d'eux par une loi, aujourd'hui bien connue, et que Leibniz a dégagée. Un peu plus tard, Cramer donna la règle générale de résolution d'un système de n équations du premier degré à n inconnues. Depuis cette époque, les déterminants ont été étudiés, sous diverses appellations, par les plus grands géomètres : Bezout, Laplace, Vandermonde, Lagrange, Gauss, Cauchy et Jacobi en développerent la théorie : c'est d'ailleurs par ces trois derniers qu'a été consacrée la détermination actuelle de *déterminant* [1].

Au point de vue didactique, les plus grands progrès sont dus à Cauchy, qui a développé les propriétés fondamentales des déterminants en partant de la notion de *fonction alternée*. Pour ma part, je trouve qu'un tel point de vue s'impose, à l'heure actuelle, dans tout enseignement qui prétend donner une formation scientifique. Mais à lui seul, il ne suffit pas à satisfaire

[1] Cf. *Encyclopedie des Sciences mathematiques*. t. I, vol. 1, fasc. 1.

l'esprit d'un élève, qui, s'intéressant à la genèse des notions, chercherait, non pas à vérifier que les déterminants possèdent les perfections requises pour la résolution des systèmes du premier degré, mais bien à trouver d'une manière naturelle le mécanisme de cette résolution, et à forger les instruments de calcul aptes à l'enregistrer simplement.

C'est à ce désir bien légitime que je vais m'efforcer de répondre ici. Je montrerai dans ce but que *la notion de volume d'un parallélépipède fournit la clef de la résolution d'un système de trois équations à trois inconnues*. Je ferai voir ensuite que ce volume est une forme trilinéaire alternée, et serai ainsi ramené au point de vue de Cauchy.

Pour la clarté de l'exposition, nous aurons à rappeler la définition et les propriétés élémentaires des transformations linéaires. Aux propriétés qui sont invariantes par ces transformations, on donne le nom de *propriétés linéaires*, pour bien les désigner des *propriétés métriques*, invariantes par le groupe plus restreint des similitudes. Par des considérations participant exclusivement de la géométrie linéaire, nous définirons *la notion de volume*, en nous bornant au cas du parallélépipède, et laissant au lecteur le soin de généraliser par application du processus classique du Calcul intégral.

Une telle étude est intéressante en elle-même. Elle offrira en outre l'avantage de lier cette notion de volume à celle du déterminant. On connaît la méthode, adoptée dans tous les cours de Mathématiques spéciales, qui consiste à poser *a priori* cette dernière notion, à l'appliquer à la résolution des systèmes, pour retrouver plus tard, par une sorte de hasard providentiel, la possibilité d'écrire le volume d'un tétraèdre ou d'un parallélépipede sous forme de déterminant! Il semble qu'il ne soit pas inutile de rechercher quelque amélioration dans l'exposition de toutes ces questions.

La méthode que nous allons développer ici même s'étendra immédiatement au cas d'un nombre quelconque de dimensions. Nous ne prendrons $n = 3$ que pour faciliter notre exposé.

2. Soient O, A, B, C quatre points non situés dans un même plan. Un vecteur $\overrightarrow{OM}$ quelconque est décomposable, d'une seule façon, suivant les droites OA, OB, OC. Cette décomposition peut se traduire par une égalité vectorielle de la forme

$$\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} + z\overrightarrow{OC}, \tag{1}$$

où x, y, z sont des quantités scalaires, qu'on nomme *coordonnées* de M dans le système de vecteurs fondamentaux $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$. Contentons-nous de rappeler que, si l'on fait un changement de vecteurs fondamentaux, les formules de transformation des coordonnées sont linéaires.

3. Deux points M et M′ se correspondent par une *transformation linéaire* lorsque les coordonnées de M′ s'expriment linéairement à l'aide des coordonnées de M. Si cette propriété a lieu lorsque M est rapporté à un système déterminé de vecteurs fondamentaux, et M′ à un autre système, elle subsiste par toute modification apportée à ces deux systèmes. Bien entendu, nous supposons que les formules de passage des coordonnées de M à celles de M′ sont de forme telle qu'à chaque point M′, elles fassent correspondre

un point M et un seul. La condition impliquée par cette hypothèse sera sûrement remplie si nous nous plaçons dans les conditions du théorème suivant :

THÉORÈME. — *Supposons toujours que les quatre points* O, A, B, C *ne soient pas dans un même plan, et qu'une transformation linéaire leur fasse correspondre justement les quatre points* O′, A′, B′, C′ *non situés eux-mêmes dans un même plan. En appelant* M′ *le transformé de* M, *l'égalité*

$$(1) \qquad \overrightarrow{OM} = x\,\overrightarrow{OA} + y\,\overrightarrow{OB} + z\,\overrightarrow{OC}$$

entraînera la suivante :

$$(2) \qquad \overrightarrow{O'M'} = x\,\overrightarrow{O'A'} + y\,\overrightarrow{O'B'} + z\,\overrightarrow{O'C'}.$$

Le lecteur déduira aisément ce théorème de la définition générale donnée plus haut. Il y rattachera non moins facilement les corollaires suivants :

1° Une transformation linéaire change deux vecteurs équipollents en deux vecteurs équipollents, ou, si l'on préfère, une translation en une autre translation. Il y a donc conservation des relations de parallélisme.

2° Il y a aussi conservation des rapports segmentaires sur une même droite. Grâce à ce fait une homothétie se changera en une homothétie de même rapport. Cette remarque s'applique en particulier à la symétrie par rapport à un point.

3° Les transformations linéaires forment un groupe, à cause de l'invariance de x, y, z dans le passage de la relation (1) à la relation (2), quand O et O′, A et A′, B et B′, C et C′, M et M′ veulent bien se correspondre.

A ce groupe on donne le nom de *groupe linéaire*. Il admet comme sous-groupe celui des translations.

Toute transformation de ce dernier devient, par le jeu d'une transformation linéaire quelconque, une autre transformation du même sous-groupe. On exprime ce fait en disant que le sous-groupe des translations est *invariant* dans le groupe linéaire.

4. Occupons-nous, dans cet ordre d'idées, de définir le *volume*, en excluant de nos raisonnements toute considération métrique. Au nombre qui mesure le volume d'un domaine, nous entendons imposer les conditions suivantes :

Condition I. — Si un domaine est décomposé en deux domaines partiels contigus et sans partie commune, le *volume* du domaine total est la somme des *volumes* des deux domaines partiels.

Condition II. — Si deux domaines se déduisent l'un de l'autre par translation, ils ont le même *volume*.

Condition III. — Le *volume* d'un parallélépipède construit sur trois vecteurs $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ est une fonction continue de ces vecteurs.

Représentons provisoirement par

$$\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}\right)$$

le *volume* qu'il s'agit de définir, lorsque le domaine est le parallélépipède construit sur $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$. Nous devrons attribuer la même signification aux deux symboles

$$\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}\right) \quad \text{et} \quad \left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC} + \lambda\overrightarrow{OA}\right),$$

car, en passant du premier au second, on ajoute et on retranche au parallélépipède initial deux domaines déduits l'un de l'autre par translation de $\overrightarrow{OA}$ (condition II). Plus généralement, nous devons avoir

$$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}) = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC} + \lambda\overrightarrow{OA} + \mu\overrightarrow{OB})$$

quels que soient les scalaires λ et μ. Nous devrons donc regarder comme *équivalents* tous les parallélépipèdes ayant en commun les arêtes $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$, l'arête $\overrightarrow{OC}$ pouvant avoir une direction quelconque et étant assujettie seulement à avoir son extrémité C dans un plan fixe parallèle à OAB. Remarquons que le sens du trièdre OABC sera respecté par toutes les modifications ainsi permises pour le point C. Par trois transformations successives du type précédent, nous pourrons ramener un parallélépipède OABC à un parallélépipède équivalent OA′B′C′ ayant ses arêtes parallèles à des directions données. Cette réduction se fera de manière que OA′ et OA soient du même côté du plan OBC et ainsi de suite.

Considérons maintenant deux parallélépipèdes OABC et O′A′B′C′ tels qu'on ait

$$\overrightarrow{O'A'} = \lambda\overrightarrow{OA}, \qquad \overrightarrow{O'B'} = \mu\overrightarrow{OB}, \qquad \overrightarrow{O'C'} = \nu\overrightarrow{OC},$$

où λ, μ, ν désignent tout d'abord des nombres positifs. Les arêtes seront donc deux à deux parallèles et de même sens. Si λ, μ, ν sont rationnels, chacun des deux parallélépipèdes pourra être constitué par juxtaposition de parallélépipèdes qui se déduisent les uns des autres par des translations. Mais alors, en vertu des conditions I et II, nous aurons nécessairement

$$\frac{(\overrightarrow{O'A'}, \overrightarrow{O'B'}, \overrightarrow{O'C'})}{(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})} = \lambda\mu\nu. \tag{3}$$

Pour que le volume soit une fonction continue des trois vecteurs $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, il est nécessaire que cette relation subsiste lorsque λ, μ, ν ne sont plus rationnels. Nous avons même intérêt, pour permettre l'application, au calcul des volumes, des opérations algébriques, à introduire des conventions de signe telles que la formule (3) soit vérifiée quels que soient les nombres réels λ, μ, ν. Ceci implique une nouvelle condition (*condition IV*) qu'il est nécessaire d'adjoindre aux précédentes pour définir le volume algébrique. Nous considérerons donc à l'avenir que notre définition du volume consiste dans l'ensemble des conditions I, II, III, IV.

5. Théorème. — *On a, en grandeur et en signe,*

$$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC'} + \overrightarrow{OC''}) = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC'}) + (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC''}).$$

En effet, les trois parallélépipèdes qui interviennent ici ont en commun les arêtes $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$. Soit $\overrightarrow{OC}$ la résultante de $\overrightarrow{OC'}$ et $\overrightarrow{OC''}$. Grâce à la possibilité de déplacer C, C′, C″ chacun dans un plan parallèle à OAB, nous pouvons substituer à chacun de ces points sa projection sur un axe Oz issu de O, projection faite parallèlement au plan OAB. Il y a dès lors communauté de direction entre toutes les arêtes de même rang dans nos divers parallélépipèdes et la proposition devient évidente. C. Q. F. D.

Corollaire. — On a, plus généralement,

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, k'\overrightarrow{OC'} + k''\overrightarrow{OC''}) \\ = k'(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC'}) + k''(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC''}).\end{aligned}$$

En résumé, le volume sera une fonction linéaire des vecteurs $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ pris isolément. Soient

$$(a_1, a_2, a_3), \quad (b_1, b_2, b_3), \quad (c_1, c_2, c_3)$$

les composantes de $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ dans un système vectoriel fondamental qu'il est inutile d'expliciter. Le volume sera une fonction trilinéaire des trois séries de variables

$$(a_1, a_2, a_3), \quad (b_1, b_2, b_3) \quad \text{et} \quad (c_1, c_2, c_3).$$

6. Théorème. — *Le volume est une fonction alternée des trois vecteurs* $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$.

Autrement dit, si l'on intervertit deux de ces vecteurs, le volume change de signe en conservant sa valeur absolue. En effet, d'après une transformation justifiée plus haut, nous avons :

$$\begin{aligned}
(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}) &= (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OC}) \\
&= (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}, -\overrightarrow{OB}) \\
&= (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}, -\overrightarrow{OB}) \\
&= -(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OB}).
\end{aligned}$$

C. Q. F. D.

Considérons toutes les permutations effectuées sur $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$: les substitutions qui les réalisent forment un groupe, celles qui comprennent un nombre pair de transpositions feront prendre au volume la valeur $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})$, celles qui comprennent un nombre impair de transpositions lui feront prendre la valeur opposée.

7. Nous sommes donc conduits, d'une manière toute

naturelle, à la recherche d'une forme trilinéaire des trois séries de variables

$$\begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{matrix}$$

possédant la propriété d'*alternance*. Seules de telles expressions seront propres à fournir l'expression d'un volume $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})$.

Or toute forme trilinéaire des trois séries de variables précédentes est une somme de termes tels que

$$\lambda_{ijl}\, a_i b_j c_k,$$

où i, j, k sont égaux chacun à l'un des nombres 1, 2, 3. Exprimons les conditions d'alternance : il faut traduire l'identité entre la forme précédente et celles qui s'en déduisent par les permutations de classe paire a, b, c, et aussi le fait qu'elle est identiquement opposée à celles qui s'en déduisent par les permutations de classe impaire. Nous nous appuierons à cet effet sur la propriété suivante :

8. Théorème. — *Considérons une substitution conduisant à une nouvelle permutation des a, b, c : elle fournit une nouvelle forme trilinéaire. Pour obtenir dans celle-ci le terme semblable à un terme de la forme initiale, il suffit d'opérer sur le système d'indices du coefficient de ce dernier la substitution précédente.*

En effet, toute substitution se ramène à une suite de transpositions. Il nous suffit donc de montrer, par exemple, que si l'on intervertit les b et les c, le terme semblable au terme de l'ancienne forme

$$\lambda_{ijk}\, a_i b_j c_k$$

sera, dans la nouvelle,

$$\lambda_{ikj}\, a_i b_j c_k,$$

et, en effet, du terme $\lambda_{ijk}\, a_i b_j c_k$ de l'ancienne forme, on déduit immédiatement par la substitution un terme en $a_i c_j b_k$. Pour obtenir le terme semblable au terme primitif, il faut donc bien intervertir les indices i et k.

Conséquence. — Les λ_{ijk} *sont des fonctions alternées de la disposition des indices* i, j, k. Cela se déduit immédiatement du théorème précédent : en effet, pour écrire que deux expressions sont identiques, ou identiquement opposées, nous devons écrire que les termes semblables ont des coefficients égaux ou opposés. Le théorème est donc démontré.

De là il résulte aussi que les seuls λ non nuls sont ceux où tous les indices i, j, k sont différents.

En résumé, il reste en facteur, dans l'expression d'une forme trilinéaire et alternée, et par suite de

$$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}),$$

un coefficient λ indéterminé, ce qui est naturel, puisque l'unité de volume n'a pas été spécifiée.

9. Définition. — On appelle *déterminant* d'ordre trois une forme trilinéaire alternée des trois séries de variables

$$\begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{matrix}$$

dont les coefficients λ sont fixés par la condition

$$\lambda_{123} = 1.$$

Le calcul d'un déterminant résulte de la théorie précédente : c'est une somme de produits partiels

$$\lambda_{ijk}\, a_i b_j c_k$$

obtenus en prenant un terme et un seul dans chaque colonne (et dans chaque ligne) et en faisant $\lambda_{ijk} = \pm 1$ suivant la parité de la permutation des i, j, k. Du théorème établi au n° 8, résulte immédiatement la possibilité d'inverser le rôle des lignes et des colonnes sans changer la valeur du déterminant.

10. *Principe de la résolution d'un système de trois équations du premier degré à trois inconnues.* — Le système

$$\begin{aligned} a_1 x + b_1 y + c_1 z &= d_1, \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z &= d_2, \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z &= d_3 \end{aligned}$$

est équivalent à une égalité vectorielle

$$x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} + z\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OD}.$$

D'après le corollaire du n° 5, nous déduisons de là

$$\begin{aligned} &\left(x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} + z\overrightarrow{OC},\ \overrightarrow{OB},\ \overrightarrow{OC}\right) \\ &\quad = x\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}\right) + y\left(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}\right) + z\left(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}\right); \end{aligned}$$

les deux derniers termes sont nuls. Nous avons donc

$$x\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}\right) = \left(\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}\right). \tag{4}$$

La règle de Cramer s'obtient donc sans douleur par cette méthode. Ainsi, non seulement, nous avons précisé la notion de volume, mais nous avons montré que celle de déterminant n'en est qu'une dépendance, et que la première suffirait à la théorie des systèmes du premier degré. D'ailleurs, dans la formule (4), x se présente sous la forme d'une fraction dont le numérateur et le dénominateur ne sont déterminés qu'à un facteur λ près, lequel s'élimine du résultat final.

11. Les considérations précédentes se généralisent aisément, grâce à la forme de symbolisme que nous avons utilisée, pour un espace à un nombre quelconque de dimensions. Il n'est pas indispensable de les reprendre ici.

Pour terminer, nous montrerons avec quelle facilité on peut rattacher au point de vue précédent quelques points fondamentaux de la théorie des déterminants.

Considérons une forme p fois linéaire, de p séries de variables, contenant chacune n variables, l'entier n surpassant l'entier p. Soient, pour fixer les idées, $p = 3$ et $n = 5$. Nous aurons une forme trilinéaire de

$$\begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 \end{matrix}$$

c'est-à-dire une somme de termes de la forme

$$\lambda_{ijk}\, a_i b_j c_k,$$

la sommation étant étendue à tous les arrangements des indices 1, 2, 3, 4, 5 pris trois à trois.

En vertu de la propriété d'alternance, nous devrons nous limiter aux arrangements, sans répétition; de plus, en groupant tous les arrangements qui proviennent d'une même combinaison, nous obtiendrons des termes dont l'ensemble constitue une forme trilinéaire alternée de trois séries contenant chacune trois variables, c'est-à-dire est le produit d'un coefficient constant par un déterminant. En définitive, la forme proposée pourra donc s'écrire

$$\Sigma \lambda_{ijk} \begin{vmatrix} a_i & a_j & a_k \\ b_i & b_j & b_k \\ c_i & c_j & c_k \end{vmatrix},$$

la sommation étant étendue à toutes les combinaisons ijk des indices 1, 2, 3, 4, 5.

De ce théorème, qui se généralise aisément pour n et p quelconques, nos lecteurs déduiront sans peine la règle de développement d'un déterminant suivant les éléments d'une rangée. Ils y rattacheront également la règle de Laplace, en vertu de laquelle on peut écrire, par exemple,

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 & d_5 \\ e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \end{vmatrix} = \Sigma(-1)^N \begin{vmatrix} a_i & a_k \\ b_i & b_k \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} c_p & c_q & c_r \\ d_p & d_q & d_r \\ e_p & e_q & e_r \end{vmatrix},$$

où les indices i, k, p, q, r pris dans leur ensemble constituent une permutation des entiers 1, 2, 3, 4, 5, la sommation étant étendue à toutes les combinaisons i, k de ces indices deux à deux, et l'exposant N représentant le nombre des inversions de la permutation

$$i \quad k \quad p \quad q \quad r.$$

12. Revenons aux transformations linéaires. La notion de déterminant nous permet d'en compléter la théorie par une proposition importante.

Théorème. — *Si l'on fait une transformation linéaire, un volume* V *se change en un nouveau* *volume V′ qui est le produit de V par le déterminant de la transformation.*

Supposons qu'aux vecteurs $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, correspondent respectivement par notre transformation les vecteurs $\overrightarrow{O'A'}$, $\overrightarrow{O'B'}$, $\overrightarrow{O'C'}$, tels que

$$\overrightarrow{O'A'} = \alpha_1 \overrightarrow{OA} + \beta_1 \overrightarrow{OB} + \gamma_1 \overrightarrow{OC},$$
$$\overrightarrow{O'B'} = \alpha_2 \overrightarrow{OA} + \beta_2 \overrightarrow{OB} + \gamma_2 \overrightarrow{OC},$$
$$\overrightarrow{O'C'} = \alpha_3 \overrightarrow{OA} + \beta_3 \overrightarrow{OB} + \gamma_3 \overrightarrow{OC}.$$

D'après ce qui précède,

$$\left(\overrightarrow{O'A'}, \overrightarrow{O'B'}, \overrightarrow{O'C'}\right)$$

est la forme $\lambda\Delta$ en posant

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}.$$

Pour déterminer λ, servons-nous de la transformation identique, pour laquelle $\overrightarrow{O'A'} = \overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{O'B'} = \overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC'} = \overrightarrow{OC}$ et $\Delta = 1$; il vient

$$\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}\right) = \lambda$$

et l'on a bien finalement

$$\left(\overrightarrow{O'A'}, \overrightarrow{O'B'}, \overrightarrow{O'C'}\right) = \Delta.\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}\right).$$

C. Q. F. D.

A cette proposition on peut rattacher aisément le théorème de la multiplication de deux déterminants.

Remarquons, en outre, que le théorème précédent nous permet de conclure à l'existence de deux sous-groupes remarquables du groupe linéaire :

1° Le sous-groupe des transformations linéaires dont le déterminant Δ est positif;

2° Le sous-groupe, intérieur au précédent, des transformations linéaires dont le déterminant Δ est égal à $+1$. Toutes ces transformations conservent les volumes en grandeur et en signe.

Toute transformation de l'un de ces sous-groupes devient, par l'effet d'une transformation linéaire quelconque, une autre transformation du même sous-groupe. Nous aurons donc obtenu ainsi deux nouveaux sous-groupes invariants.