Nouvelles annales de mathématiques

Certificats de mathématiques générales

Nouvelles annales de mathématiques 5e série, tome 1 (1922), p. 223-234

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1922_5_1__223_1>

CERTIFICATS DE MATHÉMATIQUES GÉNÉRALES.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. *Soit l'équation différentielle*

$$(1) \qquad (x^2+x)\frac{dy}{dx}+y^2+(1-2x)y-2x=0;$$

on pose $\cancel{x^2-x+x^2-x+2x^2-2x}$

$$y - x = \frac{1}{z}.$$

1° *Former l'équation différentielle* (E) *à laquelle satisfait la fonction* z *de la variable* x *quand* y *est solution de l'équation différentielle* (1).

2° *Intégrer l'équation* (E) *et déduire de la solution générale de cette équation celle de l'équation* (1).

3° *Deux axes rectilignes* Ox, Oy *étant tracés dans un plan, montrer que les courbes intégrales de l'équation* (1) *passent toutes par deux points fixes* A *et* B, *à distance finie.*

II. *Les axes* Ox, Oy, Oz *étant rectangulaires :*

1° *Quelle est la courbe décrite, quand on fait varier* t, *par le point* P *de coordonnées*

$$x_1 = \cos t,$$
$$y_1 = -\sin t,$$
$$z_1 = 1.$$

Que peut-on dire de la droite OP?

2° *Soit* (C) *la courbe décrite, quand on fait varier* t, *par le point* M *de coordonnées*

$$x = 1 + \frac{3}{2}\operatorname{tang}^2 t, \qquad y = -\operatorname{tang}^3 t, \qquad z = \frac{1}{\cos^3 t}.$$

Calculer les quantités directrices de la tangente MT *à* (C) *au point* M *et vérifier que, pour toute valeur de* t, MT *est parallèle à* OP.

3° *Soit* M′ *le point où la tangente* MT *perce le plan* xOy. *Calculer les coordonnées de* M′ *en fonction de* t. *Montrer que* M′ *décrit une parabole* (π) *et que* MM′ *est normale à cette parabole en* M′.

4° *Construire la projection* (C′) *de la courbe* (C) *sur le plan* xOy.

5° *Des résultats établis, que peut-on conclure :*

α. *Quant à la nature de* (C)?

β. *Quant à la relation géométrique qui existe entre* (C′) *et la parabole* (π)?

Peut-on déduire de là une définition géométrique simple de la courbe (C)?

Indications pour la solution. — I. On trouve pour z l'équation

$$(x^2 + x) z'_x = 1 + z$$

et l'on en déduit pour y

$$y = \frac{x^2 + K}{x - K}.$$

II. La parabole (π) a l'équation

$$y^2 = 2x.$$

La courbe (C) est une hélice tracée sur le cylindre de génératrices parallèles à Oz et de section droite la développée de la parabole.

ÉPREUVE PRATIQUE. — 1° *Calculer, pour* $n = -1, 0, 1, 2$, *la valeur de l'intégrale*

$$\varphi(n) = \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{nx^2 + 2x + 1}}.$$

2° *Montrer que si n augmente indéfiniment par valeurs positives*, $\varphi(n)$ *a pour limite zéro.*

Quelle est la partie principale de $\varphi(n)$ *par rapport à l'infiniment petit principal* $\frac{1}{n}$?

Que peut-on dire de la différence entre $\varphi(n)$ *et sa partie principale?*

Indications :

1° $\varphi(-1) = 0,785$; $\varphi(0) = 0,504$; $\varphi(1) = 0,404$; $\varphi(2) = 0,368$.

2° En écrivant l'intégrale sous la forme

$$\varphi(n)\sqrt{n} = \int_1^2 \frac{1}{x}\left(1 + \frac{2}{nx} + \frac{1}{nx^2}\right)^{-\frac{1}{2}} dx,$$

et en développant au second membre, on constate que $\varphi(n)$ a pour partie principale $\frac{L2}{\sqrt{n}}$ et que l'on a

$$\varphi(n) = \frac{L2}{\sqrt{n}} - \frac{11}{16n^{\frac{3}{2}}} + \frac{\theta}{n^{\frac{5}{2}}}.$$

(Caen, juin 1920.)

ÉPREUVE THEORIQUE. — *Soit* C *la courbe d'intersection de deux surfaces* S_1 *et* S_2 *représentées, avec des axes rectangulaires d'origine* O, *par*

$$z^2 = x^2 + y^2, \qquad x^2 + y^2 - 2ax = 0.$$

1° *Nature des surfaces* S_1 *et* S_2.

2° *Construire les projections de* C *sur les plans* $y = 0$ *et* $x = 0$.

3° *Aire de la projection sur* $x = 0$.

4° *Volume et aire des diverses faces du solide limité par* S_1 *et* S_2.

5° *m désignant la projection sur* $z = 0$ *d'un point* M *et* θ *étant l'angle* xOm, *exprimer en fonction de* θ *les coordonnées d'un point* M *de* C.

6° *On suppose que* C *est la trajectoire d'un point* M *mobile sous l'action d'une force* F *et que la vitesse angulaire de* O*m est une constante* ω. *Montrer que la force* F *rencontre une droite fixe parallèle à* Oz.

7° *On suppose que le point* M *de masse* 1, *non pesant, est mobile sans frottement sur* C *sous l'action d'une force dirigée de* M *vers* O *et d'intensité* k^2.OM. *Équation différentielle du mouvement, en supposant qu'à l'instant initial le mobile soit en* O *et que la vitesse initiale soit* $2\lambda ak$. *Nature du mouvement suivant la valeur de* λ.

8° *On suppose, dans* 7°, $\lambda = \sqrt{2}$. *Intégrer.*

9° *On suppose* $\lambda = 2$. *Trouver la loi du mouvement et la force exercée par* C *sur le point.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — 1° *Intégrer l'équation différentielle*

$$y'(y^3 - 3xy^2 - x^3) + y(y^2 + xy + x^2) = 0.$$

Construire la courbe

$$x = \frac{t^2}{(t-1)^3} e^{\frac{1-4t}{t(t-1)}}, \qquad y = \frac{t^3}{(t-1)^3} e^{\frac{1-4t}{t(t-1)}}.$$

Nombre de points où la tangente est parallèle aux axes.

Points sur les axes et tangentes en ces points.

Étude des branches infinies.

(Lyon, juillet 1920.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. *Établir la formule de Cauchy qui transforme une certaine intégrale double étendue à une aire plane en une intégrale curviligne relative au contour de cette aire.*

II. *Une courbe* C *rapportée à deux axes rectangulaires a pour équation* $y = f(x)$. *En un point quelconque* M *de* C, *on mène la normale* MN *et la perpendiculaire* MH *à* Ox, N *et* H *étant sur cet axe. On demande de trouver les équations des courbes* C, *pour lesquelles on a*

$$\overline{\text{ON}}^2 = \overline{\text{OM}}^2 + \overline{\text{MN}}^2 + 2a\left(\frac{\text{OH}}{a}\right)^n \cdot \text{MH},$$

a *représentant une longueur donnée,* n *une constante.*

On examinera en particulier le cas de $n = 1$; on tracera sommairement celle des courbes C qui passe par le point M_1 de l'axe Ox d'abscisse 1, et l'on calculera l'aire comprise entre la courbe et le segment OM_1.

III. *L'axe Oz étant la verticale descendante, on réalise la parabole d'équation*

$$x^2 = 2pz.$$

Un élément matériel pesant de masse m est lancé sur la courbe qu'il ne peut quitter, la vitesse de passage au sommet étant v_0.

1° *Déterminer les quadratures qui permettent de calculer le mouvement de l'élément; quelle est l'allure de ce mouvement?*

2° *Quelle est la pression de la masse m sur la courbe?*

3° *Si l'élément est simplement posé sur la convexité de la courbe et est lancé à partir du sommet suivant la tangente, quelles sont les vitesses v_0 acceptables pour qu'il ne quitte pas la courbe; cas particulier où $v_0 = \sqrt{pg}$.*

4° *On suppose que la courbe, au lieu d'être fixe, tourne autour de son axe avec la vitesse angulaire constante ω; reprendre, dans ce cas, la première question, indiquer la nature de la pression de la masse sur la courbe et la marche du calcul qui donnerait cette pression.*

Solution. — II. L'équation différentielle des courbes C est

$$xy' - y = \frac{x^n}{a^{n-1}};$$

lorsque n est différent de l'unité, sa solution générale est

$$y = Cx + \frac{x^n}{(n-1)a^{n-1}};$$

dans le cas où $n = 1$, elle est

$$y = Cx + x\log|x|.$$

La courbe particulière a pour équation

$$y = x\log|x|$$

et l'aire demandée est égale à $-\frac{1}{4}$.

III. — 1° L'équation de l'énergie cinétique est

$$v^2 = 2gz + v_0^2 - 2gz_0;$$

en exprimant v en fonction de z, elle donne

$$\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = \frac{2z}{p+2z}(2gz + v_0^2 - 2gz_0);$$

dans le cas du problème, $z_0 = 0$ et le mouvement a toujours lieu dans le même sens.

En projetant les forces et l'accélération sur la normale, on obtient la réaction

$$N = \frac{mv^2}{\rho} - mg\sqrt{\frac{p}{p+2z}} = m(v_0^2 - gp)\sqrt{\frac{p}{(p+2z)^3}};$$

elle est nulle si $v_0 = \sqrt{gp}$, et dans ce cas la masse décrit librement la parabole comme un projectile. Si v_0 est supérieur à $\sqrt{gp}$, la masse supposée placée sur la convexité de la courbe la quitte dès le sommet.

2° Lorsque la parabole tourne autour de son axe, l'étude du mouvement relatif conduit à l'équation

$$v^2 - v_0^2 = 2(g + \omega^2 p)(z - z_0)$$

et les circonstances du mouvement sont analogues aux précédentes. On obtient la réaction en calculant l'accélération par le théorème de Coriolis; la composante de la réaction suivant la tangente au parallèle est

$$N_1 = 2m\omega v\sqrt{\frac{p}{p+2z}}$$

et sa composante suivant la normale au méridien est, en supposant $z_0 = 0$,

$$N_2 = m\,[v_0^2 - gp + 4\omega^2 z(p+z)]\sqrt{\frac{p}{(p+2z)^3}}.$$

Épreuve pratique. — *On considère la parabole d'équation*

$$x^2 + 4y - 4 = 0$$

et la portion AB *de cette parabole comprise dans l'angle positif des coordonnées.*

Déterminer l'aire du secteur OAB, *les coordonnées du centre de gravité de cette aire supposée homogène et la longueur de l'arc* AB.

Calculer une valeur approchée de l'abscisse d'un point M *de cet arc tel que la droite* OM *partage l'aire du secteur en deux parties équivalentes.*

Indications : aire $= \frac{4}{3}$; arc $= \sqrt{2} + \log(1 + \sqrt{2})$; coordonnées du centre de gravité : $\frac{3}{4}$ et $\frac{2}{5}$; abscisse du point M : 1,192.

(Nancy, juin 1920.)

Épreuve théorique. — I. *On considère l'équation différentielle*

$$(e) \qquad 4x^2y(xy' - y) + x^4 - y^4 = 0.$$

1° *Y effectuer le changement de variables défini par*

$$x^2 = u, \qquad y^2 = v.$$

On est conduit à une nouvelle équation différentielle entre u *et* v *que l'on intégrera.*

2° *En déduire que la solution générale de* (e) *peut s'exprimer par les formules*

$$(1) \qquad \begin{cases} x = a\,\dfrac{1 - t^2}{1 + t^2}, \\[2ex] y = at\,\dfrac{1 - t^2}{1 + t^2}, \end{cases}$$

où a *est une constante arbitraire. Construire l'une des courbes représentées par les équations* (1). *Montrer qu'elle peut être engendrée de la façon suivante : sur une droite variable issue de* A(a, 0), *on porte à partir du point* P, *où cette droite rencontre* Oy, *une longueur* PM *ou* PM' :

$$\mathrm{PM} = \mathrm{PM'} = \mathrm{PO}.$$

Les points M *et* M' *décrivent la courbe en question.*

3° *Déterminer le volume engendré par la surface de la boucle de la courbe en tournant autour de son axe de symétrie.*

II. *Un point matériel pesant* M, *de masse* m, *est suspendu à un point fixe* O *par un fil élastique, de masse négligeable, exerçant sur* M *une force* attractive *proportionnelle à son allongement et égale en valeur absolue à*

$$m\omega^2(x-a), \quad \text{pour } x \geqq a,$$

x *étant la longueur du fil à l'instant envisagé et* a *sa longueur à l'état naturel.*

Déterminer le mouvement du point M *sur la verticale du point* O.

Examiner en particulier le cas où, après avoir tiré verticalement sur le fil de manière à lui donner une longueur l, *on abandonne le système à lui-même sans vitesse initiale. Discuter en supposant l'action du fil nulle pour* $x < a$.

Solution. — I. 1° Le changement de variables indiqué conduit à l'équation

$$4u^2\frac{dv}{du} = 4uv - u^2 + v^2,$$

que l'on intègre en posant $v = \tau u$: on trouve

$$u = k\left(\frac{1-\tau}{1+\tau}\right)^2, \qquad v = k\tau\left(\frac{1-\tau}{1+\tau}\right)^2.$$

2° On retrouve les formules indiquées en posant

$$\tau = t^2, \qquad k = a^2.$$

Les courbes obtenues sont des strophoïdes homothétiques par rapport à l'origine, point double commun, admettant pour asymptotes les droites $x + a = 0$.

3° Le volume demandé est égal à $\dfrac{2\pi a^3}{3}(3\,\mathrm{L}\,2 - 2)$.

II. Pour $x \geqq a$, on obtient un mouvement vibratoire simple, de période $\dfrac{2\pi}{\omega}$, le centre étant la position d'équilibre du point M.

Si $|a - l|$ est $\leqq \frac{2g}{\omega^2}$, le mouvement est représenté par la formule

$$x = \left(a + \frac{g}{\omega^2}\right)(1 - \cos\omega t) + l\cos\omega t.$$

Si $|a - l|$ est $> \frac{2g}{\omega^2}$, on obtient alternativement le mouvement vibratoire représenté par la formule précédente et le mouvement vertical d'un point pesant.

Épreuve pratique. — *Calculer l'intégrale définie*

$$\int_{3,9}^{4} \frac{\sqrt{x^2+2}(x+3)(x^2+2,2x-5,09) + x(3-x)(x+0,1)^2}{\sqrt{x^2+2}(9-x^2)(x+0,1)^2}\,dx$$

à 10^{-2} *près. (On pourra calculer d'abord l'intégrale indéfinie.)*

Solution. — L'intégrale indéfinie est, à une constante additive près,

$$\begin{aligned} &\mathrm{AL}|3 - x| + \mathrm{BL}|x + 0,1| \\ &\qquad - \frac{\mathrm{C}}{x+0,1} + \mathrm{L}\left|x + \sqrt{x^2+2}\right| \\ &\qquad - \frac{3}{\sqrt{11}}\mathrm{L}\left|\frac{x + \sqrt{x^2+2} + 3 - \sqrt{11}}{x + \sqrt{x^2+2} + 3 + \sqrt{11}}\right|, \end{aligned}$$

avec

$$\mathrm{A} = \frac{10,51}{9,61}, \qquad \mathrm{B} = \mathrm{A} - 1, \qquad \mathrm{C} = -\frac{5,3}{3,1}.$$

On achèvera le calcul au moyen des tables.

(Dijon, juin 1920.)

Épreuve théorique. — I. *On donne les expressions*

$$x = 3r\sin\varphi - r\sin3\varphi,$$
$$y = 3r\cos\varphi - r\cos3\varphi;$$

on demande de trouver la forme de la courbe, lieu du point de coordonnées (x, y) *par rapport à des axes rectangulaires, lorsque* φ *varie. Montrer que cette courbe est* *une épicycloïde, lieu d'un point d'une circonférence de rayon r, roulant sans glisser sur une circonférence de rayon $2r$. Indiquer la position de ces circonférences par rapport aux axes de coordonnées.*

Trouver la longueur S *de l'arc parcouru par* M, *lorsque* φ *varie de la valeur* 0 *à la valeur* α. *Trouver l'aire totale enfermée par la courbe.*

II. *Chercher la solution de l'équation différentielle*

$$ay'' = 2$$

(*a étant une constante*) *qui s'annule pour* $x = 0$, *et dont la dérivée prend alors la valeur* λ. *Construire la courbe* (C) *représentant, en axes rectangulaires, la variation de cette fonction. Montrer que si* λ *varie, les courbes* (C) *restent égales entre elles.*

En un point M *de coordonnées* (x, y) *passe une courbe* (C) *correspondant à une valeur convenable du paramètre* λ. *Calculer. en fonction de* x, y, a, *le coefficient angulaire de la tangente* Mt *à cette courbe.*

Déterminer une courbe (C′) *telle qu'en chaque point* M′ *sa tangente* M′t' *soit symétrique par rapport à* Mx, *parallèle à* Ox, *de la tangente* M′t *à la courbe* (C) *qui passe par le même point* M′. *Indiquer la forme des diverses courbes* C′.

Indications sur la solution. — I. La courbe est une épicycloïde à deux rebroussements, engendrée par un point M d'un cercle de rayon r roulant sans glisser sur un cercle de rayon $2r$. Le point M coïncide avec le point de contact P des deux cercles, lorsque ce point P vient sur l'axe Oy, ce qui donne les deux rebroussements. L'angle φ est égal à

$$\varphi = (\mathrm{OP}, \mathrm{O}y).$$

On trouve immédiatement

$$ds^2 = 36r^2 \sin^2\varphi \, d\varphi^2,$$

d'où S sans difficultés.

Pour l'aire, on peut prendre la différentielle de l'aire balayée par le rayon vecteur :

$$\frac{1}{2}(x\,dy - y\,dx) = -6r^2(1-\cos 2\varphi)\,d\varphi.$$

L'aire totale est

$$12\pi r^2.$$

II. La solution demandée est manifestement

$$y = \frac{x^2}{a} + \lambda x.$$

Le coefficient angulaire m de la parabole passant par le point (x, y) est

$$m = \frac{y}{x} + \frac{x}{a}.$$

La courbe (C') est définie par l'équation différentielle

$$y' = -\left(\frac{y}{x} + \frac{x}{a}\right),$$

dont la solution s'écrit

$$y = -\frac{x^2}{3a} + \frac{\mu}{x} \qquad (\mu = \text{const.}).$$

ÉPREUVE PRATIQUE. — I. *Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle*

$$f(x) = \frac{3x^4 - 8x^3 + 10x^2 - 1}{(x-1)^2(x^2+1)^2},$$

les éléments simples etant des fractions ayant pour dénominateurs respectifs des puissances de binomes du premier degré, réels ou imaginaires.

Chercher celle des primitives de $f(x)$ qui tend vers zéro lorsque x augmente indéfiniment.

II. *Calculer à un millième près la valeur de l'intégrale définie :*

$$\int_0^2 \frac{t+1}{t^2+1}\,dt.$$

Indications. — I. La décomposition de la fraction rationnelle est

$$\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{1+i}{(x-i)^2}+\frac{1-i}{(x+i)^2}$$

et la primitive s'annulant à l'infini est

$$\frac{-3x^2+4x-3}{(x-1)(x^2+1)}.$$

II. La valeur de l'intégrale définie est

$$\frac{1}{2}\,L\,5+\operatorname{arc\,tang} 2 = 1{,}912.$$

(Lille, juillet 1920.)