PAUL MONTEL

Sur les ombilics

Nouvelles annales de mathématiques 5e série, tome 1 (1922), p. 21-23

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1922_5_1__21_1>

[O[1]5h]

SUR LES OMBILICS;

PAR M. PAUL MONTEL.

Si l'on appelle « ombilic d'une surface » tout point de cette surface en lequel l'indicatrice d'Euler est une circonférence, on sait que la seule surface réelle dont tous les points sont des ombilics est la sphère. Je me propose de donner une démonstration géométrique simple de cette proposition (1).

(1) M. R. Harmegnies a donné aussi, dans ce journal, une démonstration géométrique du même théorème (*Nouvelles Annales*, t. XX, 1920, p. 180).

Supposons qu'il existe une surface (S) dont tous les points soient des ombilics. Le cône circonscrit à cette surface dont le sommet est un point arbitraire P est tangent à la surface (S) le long d'une courbe (C); en chaque point M de cette courbe, la direction de la tangente à (C), conjuguée de la direction MP, est perpendiculaire à MP puisque M est un ombilic de (S). La courbe (C) est donc normale à tous les rayons vecteurs issus de P : il en résulte que ce rayon vecteur a une longueur constante et que la sphère (Σ), de centre P et de rayon PM, est orthogonale à (S) en tous les points de (C).

Laissons fixe le point M et supposons que le point P se déplace dans le plan tangent en M à la surface (S). On voit que cette surface (S) est orthogonale à toutes les sphères (Σ) de rayons PM; toutes ces sphères sont tangentes au point M à la normale MN à la surface (S). Une inversion de pôle M remplacera les sphères (Σ) par une famille de plans parallèles à la direction MN et la surface (S), par une surface normale à tous ces plans, c'est-à-dire par un plan perpendiculaire à MN. La surface (S), qui est l'inverse d'un plan, est donc une sphère.

La démonstration s'applique à toute surface (S) pour laquelle on peut définir les ombilics; analytiquement, les fonctions qui permettent la représentation de la surface doivent posséder des dérivées premières et des dérivées secondes. Dans le cas où la surface (S) est analytique, il suffit de supposer qu'il existe une petite région de cette surface dont tous les points *h* sont des ombilics. On choisit alors le point M dans cette région.

On peut rattacher à la question précédente différents problèmes qui se présentent naturellement au sujet des ombilics des surfaces algébriques. Une telle surface peut posséder une ou plusieurs lignes d'ombilics formant des courbes algébriques.

Quelles sont les limites supérieures du nombre et des degrés des lignes d'ombilics que peut posséder une surface algébrique de degré m?