J. LEMAIRE

Agrégation des sciences mathématiques (concours de 1919)

Nouvelles annales de mathématiques 5e série, tome 1 (1922), p. 216-223
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1922_5_1__216_1>

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES (CONCOURS DE 1919).

SOLUTION DE LA QUESTION DE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES;

Par M. J. LEMAIRE.

1. *On donne un trièdre t de sommet* A. *Soient* P, Q, R *les projections orthogonales d'un point quel-*

([1]) Si l'on étudie d'un peu plus près les deux mouvements possibles quand le centre de gravité est dans la région de droite par exemple, on trouve que pour ces deux mouvements, la composante normale de la réaction au point B est dirigée dans deux sens différents.

conque M *sur les plans des faces de ce trièdre*, AM′ *la droite menée par* A, *perpendiculairement au plan* PQR; *soient* P′, Q′, R′ *les projections orthogonales du point* M′ *sur les plans des faces du même trièdre. Démontrer que le plan* P′Q′R′ *est perpendiculaire à* AM. *Les deux droites* AM *et* AM′ *sont dites réciproques l'une de l'autre par rapport au trièdre t; peuvent-elles être confondues?*

2. *On donne un tétraèdre* T, *de sommets* A_1, A_2, A_3, A_4, *et un point* M; *on construit la droite* A_1M_1 *réciproque de* A_1M *par rapport au trièdre* $A_1(A_2A_3A_4)$ *de sommet* A_1: *on construit de même la droite* A_2M_2 *réciproque de* A_2M *par rapport au trièdre* $A_2(A_1A_3A_4)$, *etc. Démontrer que les quatre droites* A_1M_1, A_2M_2, A_3M_3, A_4M_4 *concourent en un point* M′.

Les deux points M *et* M′ *sont dits réciproques l'un de l'autre par rapport au tétraèdre* T; *peuvent-ils être confondus?*

3. *Démontrer que les projections orthogonales des points* M *et* M′ *sur les faces du tétraèdre sont des points situés sur une même sphère.*

4. *Si* M *se déplace sur un plan* P *quelconque,* M′ *se déplace sur une surface qui passe par les six arêtes de* T. *Montrer que cette surface contient trois autres droites qui s'appuient chacune sur deux arêtes opposées de* T *et qui sont dans un même plan* P′. *Montrer que si l'on remplace le plan* P *par le plan* P′, *le plan* P′ *est remplacé par le plan* P.

5. *Le tétraèdre* T *étant supposé régulier, on porte sur les deux arêtes opposées* A_1A_2 *et* A_3A_4 *des longueurs égales* $A_1\alpha$ *et* $A_2\beta$, *toutes deux de* A_1 *vers* A_2

et de A_3 vers A_4, ou toutes deux dans le sens opposé. On suppose que M *décrive la droite* $\alpha\beta$; *quel est alors le lieu du milieu de* MM'?

1, 2 et 3. — Les trois premières parties de la question sont implicitement traitées, d'une façon élémentaire, dans la Géométrie de Rouché (*Géométrie dans l'espace*, septième édition, page 648). On peut aussi les établir comme il suit : de ce qu'il passe par quatre points une sphère et une seule, il résulte qu'il existe une quadrique de révolution et une seule, ellipsoïde allongé ou hyperboloïde à deux nappes, ayant un foyer donné, et tangente à quatre plans.

Désignons par (Σ) la quadrique de révolution, de foyer M, qui touche les plans formant le tétraèdre (T) : $A_1A_2A_3A_4$. Le plan isogonal au plan A_1A_2M par rapport au dièdre A_1A_2 passe au second foyer M' de (Σ); il en est de même des autres plans analogues : ces six plans ont donc un point commun. Deux tels points sont *réciproques*, ou *inverses*, par rapport au tétraèdre.

Pour qu'un point coïncide avec son inverse, il faut et il suffit qu'il soit commun aux bissecteurs de trois dièdres, intérieurs ou extérieurs, du tétraèdre, n'appartenant pas à un même trièdre : il y a donc en général huit tels points, qui sont les centres des sphères tangentes aux quatre plans, et ce nombre peut, comme on sait, se réduire à sept, six ou cinq.

Les projections des deux points inverses M et M', foyers de (Σ), sur les plans des faces de (T), sont sur une même sphère (S), ayant pour centre le milieu de MM', et pour rayon le demi-axe focal de la quadrique.

Les produits des distances de M et M' aux plans tangents à (Σ), et en particulier aux plans des faces du tétraèdre, sont égaux; si x, y, z, t sont les coordonnées normales de M par rapport à (T), x', y', z', t' celles de M′, on voit aisément que, suivant que x et x' sont, ou non, de même signe, il en est de même de y et y', z et z', t et t', de sorte que, dans tous les cas, les coordonnées de deux points inverses satisfont aux relations

$$xx' = yy' = zz' = tt',$$

et réciproquement.

De ce qui précède, il résulte, en revenant aux notations de la première partie de l'énoncé, que si AM est une droite issue du sommet d'un trièdre, cette droite détermine, avec les arêtes, trois plans dont les isogonaux, par rapport aux dièdres correspondants, ont une droite commune, qu'on peut appeler la droite *réciproque*, ou *inverse*, de la première par rapport au trièdre.

Deux points quelconques, M et M′, de deux telles droites sont les foyers d'une quadrique de révolution tangente aux plans formant le trièdre, et sont inverses par rapport au tétraèdre constitué par ces trois plans et par un plan tangent arbitraire de la quadrique.

Considérons le cercle passant par les projections P, Q, R de M sur les plans des faces du trièdre; comme il appartient à la sphère (S) relative aux points M et M′, ainsi qu'à la sphère de diamètre AM, son plan est perpendiculaire à la droite des centres de ces sphères, laquelle joint les milieux de MM′ et de MA, par suite aussi à la droite AM′.

Le plan P′Q′R′, déterminé par les projections de M′ sur les plans des faces du trièdre, est de même perpendiculaire à AM; il y a réciprocité entre les droites inverses AM et AM′. Pour que AM coïncide avec son inverse AM', il faut et il suffit que cette droite appartienne à deux plans bissecteurs de deux dièdres, intérieurs ou extérieurs, du trièdre ; il y a donc quatre droites confondues avec leurs inverses, ce sont les bissectrices du trièdre.

Reprenant les notations de la deuxième partie, nous voyons qu'il suit de ce qui précède que les droites réciproques de A_1M, A_2M, A_3M, A_4M, par rapport aux trièdres correspondants de (T), concourent au point M' inverse de M.

4. Examinons la position de M' quand M varie dans l'espace. D'abord, quand M n'appartient à aucun des plans formant le tétraèdre (T), son inverse M' est parfaitement déterminé, et unique.

Tout point du plan de l'une des faces a pour inverse le sommet opposé à cette face; et l'inverse d'un sommet est indéterminé sur le plan de la face opposée. Si M appartient à une arête, son inverse est indéterminé sur l'arête opposée.

Transformée d'une droite : supposons que M parcourt une droite donnée (D), les plans A_2A_3M', A_3A_4M', A_4A_2M' forment des faisceaux homographiques deux à deux, de sorte que M' décrit une cubique gauche (Δ) ; comme au point où (D) coupe le plan de chaque face de (T) correspond le sommet opposé, cette cubique est circonscrite au tétraèdre.

Si (D) rencontre une arête A_1A_2, (Δ) se décompose en l'arête opposée A_3A_4 et en une conique située dans le plan isogonal au plan (A_1A_2D) par rapport au dièdre A_1A_2, et passant en A_1 et A_2.

Si (D) coupe deux arêtes opposées, la cubique se décompose en ces deux arêtes et une troisième droite qui les rencontre.

Transformée d'un plan : si M décrit un plan (P), son inverse décrit une surface (Π); à une droite (D) correspond d'ailleurs une cubique gauche (Δ); (Π) et (D) ont autant de points communs que (P) et (Δ), c'est-à-dire trois, de sorte que (Π) est une surface du troisième degré.

Comme au point où (P) coupe une arête de (T) correspond un point indéterminé de l'arête opposée, la surface (Π) contient les six arêtes du tétraèdre. Q et R désignant les points où (P) coupe deux arêtes opposées, à la droite QR du plan correspond sur (Π) une autre droite rencontrant aussi ces deux arêtes : la surface (Π) possède trois droites analogues.

Soient L, L′, L″ les trois droites de (P) analogues à QR, Λ, Λ′, Λ″ les droites correspondantes de (Π). Les droites L et L′ ayant un point commun, leurs inverses ont en commun le point inverse; Λ, Λ′, Λ″ se coupent donc deux à deux; et comme les trois droites de (P) se coupent deux à deux en trois points distincts, il en est de même des trois droites de (Π), qui se coupent deux à deux aux points inverses des précédents; donc Λ, Λ′, Λ″ sont dans un même plan (P′) et il y a évidemment réciprocité entre les deux plans : au plan (P′) correspond une surface (Π′) qui contient les trois droites L, L′, L″ du plan (P).

Si (P) est le plan de l'infini, la surface inverse (Π) devient une surface du troisième ordre particulière, qui est le lieu des foyers des paraboloïdes de révolution tangents aux plans des faces du tétraèdre, c'est-à-dire des points dont les projections sur ces plans appartiennent à un même plan.

5. Considérons un tétraèdre Θ dans les arêtes opposées sont égales deux à deux; on voit fort aisément

que ses faces sont égales, ainsi que ses hauteurs, et par suite aussi les quatre angles que font deux arêtes opposées avec les faces qu'elles joignent respectivement; toute droite joignant les milieux de deux arêtes opposées est perpendiculaire à ces arêtes, et est un axe de symétrie pour le tétraèdre; signalons aussi l'égalité des dièdres ayant pour arêtes deux arêtes opposées de Θ. $A_1A_2A_3A_4$ étant un tel tétraèdre, prenons pour sens positif, sur A_1A_2, le sens de A_1 vers A_2, et sur A_3A_4 le sens de A_3 vers A_4, et soient sur ces droites deux points α et β tels que

$$\overline{A_1\alpha} = \overline{A_3\beta};$$

si le plan isogonal de $A_3A_4\alpha$ par rapport au dièdre A_3A_4 coupe en α' l'arête A_1A_2, les produits $\overline{\alpha P_1}.\overline{\alpha' P'_1}$ et $\overline{\alpha P_2}.\overline{\alpha' P'_2}$ des mesures algébriques des distances des points α et α' aux plans des faces opposées à A_1 et A_2 sont égaux; par suite, A_1A_2 faisant avec ces plans des angles égaux, on a aussi

$$\overline{\alpha A_2}.\overline{\alpha' A_2} = \overline{\alpha A_1}.\overline{\alpha' A_1};$$

α et α' sont donc isotomiques par rapport à A_1A_2; de même les points analogues β et β' sur A_3A_4.

K et L étant les milieux de A_2A_3 et A_1A_4, la droite KL, perpendiculaire commune à ces arêtes, est un axe de symétrie pour le tétraèdre, donc pour α et β', α' et β, de sorte que les droites $\alpha\beta$ et $\alpha'\beta'$, qui sont inverses par rapport à Θ, sont symétriques par rapport à KL.

Le dièdre A_1A_4 étant son propre symétrique par rapport à ce même axe, les plans isogonaux relativement à ce dièdre qui déterminent sur $\alpha\beta$ et $\alpha'\beta'$ deux points inverses M et M' sont, eux aussi, symétriques par rapport à KL. Par conséquent, les points M et M′ le sont eux-mêmes, la droite MM′, quand M décrit $\alpha\beta$, reste perpendiculaire à KL, et le lieu du milieu de MM′ est cette droite KL.

Ces conclusions s'appliquent en particulier au tétraèdre régulier.