Nouvelles annales de mathématiques

Georges Bouligand

Introduction à l'étude de la mécanique et de ses principes

Nouvelles annales de mathématiques 5e série, tome 1 (1922), p. 181-188

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1922_5_1__181_0>

[R6]

INTRODUCTION A L'ETUDE DE LA MÉCANIQUE ET DE SES PRINCIPES;

PAR M. GEORGES BOULIGAND.

(*Suite et fin.*)

23. En particulier, si les planètes étaient des solides, formés de couches homogènes et sphériques, ou la constance du champ de gravitation dans la portion de l'espace qu'elles occupent à un instant donné, leurs axes de rotation auraient des directions invariables par rapport aux étoiles fixes. En outre, la rotation serait uniforme. Si l'on tient compte du refroidissement de la planète, qui la contracte et diminue son moment d'inertie, la vitesse de cette rotation augmente très lentement, de manière à assurer la constance du moment cinétique dans le mouvement autour du centre de gravité. De plus, les principes de la Mécanique elle-même ont fait prévoir que les planètes sont ellipsoïdales, et non sphériques; dans ces conditions, les actions de gravitation n'ont plus une résultante unique appliquée au centre. Il en résulte des phénomènes de précession et de nutation; en particulier, sous l'action prépondérante du Soleil et de la Lune s'exerçant sur le renflement équatorial terrestre, l'axe de notre planète décrit très lentement un cône voisin d'un cône de révolution. Le phénomène de la précession des équinoxes se trouve ainsi expliqué, et c'est là une confirmation éclatante de la valeur des principes newtoniens.

24. Revenons à la Mécanique terrestre : pour faire

la synthèse des mouvements qui s'y rapportent, il nous faut introduire un nouveau concept, celui des *forces de liaison*. Considérons le mouvement d'un point, ou d'une partie quelconque d'un système, tel qu'il se produit dans le déplacement d'ensemble; isolons par la pensée cette partie du système : les forces de liaison interviennent pour reconstituer son mouvement, extrait sans modifications du déplacement d'ensemble.

Les forces de liaison intéressent les problèmes les plus simples, ceux qui ont été étudiés les premiers en vue de la recherche des lois générales du mouvement, comme celui du pendule simple et du plan incliné. Soit un pendule simple; on peut reconstituer son mouvement, en faisant intervenir, à côté de la pesanteur une force fictive, portée par le fil, et maintenant la masse pesante sur le cercle qu'elle décrit. Il y a là un nouvel élément pour la vérification des principes newtoniens : entre les deux équations de la Dynamique du point qui, dans le plan d'oscillation, déterminent le mouvement, on peut éliminer l'intensité inconnue de la réaction. On obtiendra une égalité exprimant que l'accélération tangentielle est $-g \sin\alpha$. Or les conséquences de cette relation peuvent se vérifier expérimentalement.

Considérons les équations du mouvement d'un système : la recherche systématique de leurs combinaisons indépendantes des forces de liaison nous amènerait à traiter ici le théorème des forces vives et, plus généralement, à développer les méthodes de la Dynamique analytique.

Il est très remarquable que la possibilité se soit offerte d'opérer la synthèse de mouvements de systèmes de nature physique très variable, à l'aide de ces forces fictives. Pour leur donner un sens concret, on a recours aux propriétés physiques de l'agent de liaison. Si cet agent est un fil flexible, comme dans le problème du pendule, la force de liaison correspondante est une tension. Dans le cas d'un solide interviendront des forces de cohésion, etc. La classification des forces de liaison est intimement liée à celle des états physiques de la matière.

25. Les forces de liaison ont un caractère absolu, c'est-à-dire elles sont indépendantes du système de référence. Soit un pendule simple, dont la masse pesante M oscille sur une circonférence (mouvement normal). A ce mouvement, adjoignons celui d'un mobile fictif M', obtenu en supposant qu'à un instant donné, la masse se détache du fil. Il n'y a pas de discontinuité pour la vitesse, mais il y a pour l'accélération une variation brusque, vectoriellement égale au quotient, par la masse, de la force de liaison tout à coup disparue.

Or, considérons deux mobiles M et M' qui, à l'instant t, coïncident et possèdent le même vecteur vitesse, propriété d'ailleurs indépendante du système de référence. De leurs accélérations $\vec{\gamma}$ et $\vec{\gamma}'$, par rapport à un premier système de référence, on déduit leurs accélérations $\vec{\gamma}_1$ et $\vec{\gamma}'_1$, par rapport à un second, à l'aide du théorème de Coriolis. Dans cette transformation, il faudra faire intervenir la même accélération d'entraînement pour M et pour M' (à cause de leur communauté de position à l'instant t), et également la même accélération complémentaire (vu la coïncidence de leurs vitesses). On a donc

$$\vec{\gamma}'_1 - \vec{\gamma}_1 = \vec{\gamma}' - \vec{\gamma}.$$

Mais alors, en appliquant ce résultat au problème du pendule, il est bien établi que la variation brusque de l'accélération est indépendante du système de référence. Il en est donc de même de la force de liaison.

26. Le résultat précédent a une grande importance; dans tous les cas, on peut l'appliquer aux forces intérieures à un système formé de points matériels : il suffit, dans les équations (2) du n° 7, de faire rentrer dans les termes $\vec{\Phi}$, c'est-à-dire dans les forces extérieures, tout ce qui dépend du trièdre de référence. En opérant ainsi, le principe d'égalité de l'action et de la réaction s'appliquera aux forces intérieures, indépendamment des axes choisis. Il pourra être regardé comme un principe absolu. La masse, définie à l'aide de ce principe, prend elle-même un caractère absolu [ce que nous avions admis plus haut ([1])].

27. Pour terminer cet exposé, où nous avons volontairement omis de parler de la confirmation apportée aux principes newtoniens par le phénomène des marées, par certains phénomènes astronomiques extérieurs au monde solaire (étoiles multiples), etc., nous mentionnerons les expériences du gyroscope et du pendule de Foucault.

Le gyroscope consiste essentiellement en un solide de révolution suspendu par son centre de gravité. Dans le mouvement autour du centre de gravité, le moment cinétique est encore constant et, par suite, si ce mouvement est initialement une rotation autour de l'axe de révolution, ce mouvement se continuera indéfini-

([1]) Le contenu des n^{os} 25 et 26 est emprunté au Cours de l'École Polytechnique de M. Painlevé.

ment. Ce qui précède suppose d'ailleurs le mouvement rapporté à des directions astronomiquement fixes. Mais alors, si l'appareil est susceptible de rotations de longue durée, on verra la direction de l'axe, pointée initialement vers une étoile, accompagner celle-ci dans son mouvement diurne. Pratiquement, la durée de la rotation peut atteindre dix minutes : pendant ce temps, la Terre tourne environ de deux degrés et demi. L'expérience confirme bien les prévisions ci-dessus.

Mais l'expérience du pendule de Foucault, susceptible de se prolonger pendant plusieurs heures, donne des indications beaucoup plus précises. Soit, en un point O de la surface du globe, Oz la direction d'équilibre du fil à plomb, c'est-à-dire la direction du champ Γ, obtenu en superposant au champ de gravitation celui de la force centrifuge. Dans le plan perpendiculaire en O à Oz, prenons deux autres axes Ox, dans le plan méridien et Oy suivant la tangente au parallèle. Supposons que Oz soit ascendant, que le pendule soit attaché en un point A de Oz, et que la position d'équilibre de la masse pesante M soit justement le point O. Pour les petites oscillations, on peut raisonner comme si le point M demeurait dans le plan xOy, Cherchons dans ce plan la force tangentielle qui sollicite M. Le champ Γ, uniforme et parallèle à Oz, fournit une composante tangentielle d'expression vectorielle

$$mk(\mathrm{O}-\mathrm{M}),$$

donc l'action isolée ferait décrire au point M une ellipse E de centre O suivant la loi des aires. Mais, au champ Γ, il faut adjoindre la force centrifuge composée, dont l'expression

$$-2m\overrightarrow{\mathrm{O}\Omega}\wedge\frac{d\mathrm{M}}{dt}$$

fait intervenir le produit vectoriel (n° 11) de la rotation instantanée $\overrightarrow{O\Omega}$ du trièdre $Oxyz$ par la vitesse de M relative à ce trièdre. Il faut prendre seulement la projection sur le plan xOy, c'est-à-dire

$$-2m\overrightarrow{O\omega} \wedge \frac{dM}{dt},$$

en appelant ω la projection orthogonale de Ω sur l'axe Oz.

Cette force centrifuge composée serait celle qu'il faudrait introduire si le trièdre $Oxyz$ était animé, par rapport à un trièdre regardé comme fixe, d'une rotation de vitesse angulaire ω autour de Oz. L'ellipse E serait fixe par rapport à ce trièdre qui, par rapport à $Oxyz$, tourne autour de Oz, avec la vitesse angulaire $-\omega$. Nous négligeons ici la force centrifuge, mais cela est légitime, puisqu'elle est de l'ordre de ω^2.

Nous devons donc réaliser ici la synthèse du mouvement en composant, avec le mouvement elliptique de M, observé pendant une oscillation, une rotation très lente, de vitesse angulaire $-\omega$. La Terre tourne dans le sens rétrograde, donc $-\omega$ est positif. On verra donc le plan d'oscillation tourner dans le sens direct de la Mécanique, c'est-à-dire dans le sens des aiguilles d'une montre. C'est ce que l'expérience confirme [1] (à condition de se placer dans l'hémisphère boréal, condition nécessaire à la validité du raisonnement précédent).

---

(1) On pourrait objecter que, si l'on analyse avec quelque précision les petits mouvements d'un pendule sphérique, on peut les réaliser en imprimant à un point animé d'un mouvement elliptique du type précédent un mouvement d'entraînement de rotation : on obtiendrait donc en Dynamique théorique un phénomène analogue, et cela sans mettre en jeu l'influence perturbatrice de la Terre. Toutefois il convient de remarquer que si un tel mouvement est

28. Après cette vue d'ensemble sur les principes de la Mécanique et leur confrontation expérimentale, revenons un instant aux mouvements de notre système solaire. Voici des chiffres qui nous donneront une idée de l'ordre de précision obtenu dans la synthèse mathématique de ces mouvements : entre les résultats de l'observation et ceux du calcul, se manifeste seulement un écart angulaire de 15″ pour le mouvement de la Lune en deux siècles et demi. La divergence la plus notable qui ait été enregistrée a trait au mouvement de Mercure; le déplacement réel du périhélie de la planète diffère du déplacement théorique de 43″ par siècle. Il reste à l'expliquer : Einstein a proposé une solution du problème, dont le principe semble avoir un champ d'applications très vaste. Sur ce point, nous renverrons le lecteur aux travaux d'Einstein et de ses commentateurs et tout particulièrement à l'Ouvrage de M. Hermann Weyl (*Temps, espace, matière*), et à celui, plus récent, de M. Jean Becquerel (*Le principe de relativité et la théorie de la gravitation*).

Nos lecteurs remarqueront peut-être que nous n'avons pas fait mention du *principe de l'inertie*. Ce principe est une conséquence pure et simple de l'équation

$$\vec{F} = m\vec{\gamma}.$$

Il suffit de supposer $\vec{F} = 0$. Il vient $\vec{\gamma} = 0$. Donc un

---

réalisé, on en déduit un autre mouvement possible, symétrique par rapport à un plan vertical. Donc la rotation du plan d'oscillation, suivant les conditions initiales, se produirait tantôt dans un sens, tantôt dans l'autre. Dans le problème de Foucault, elle se produit toujours dans le sens positif. Il n'y a donc aucune objection possible.

point qui n'est soumis à aucune force est animé d'un mouvement rectiligne et uniforme.

Ce principe s'applique à tous les systèmes de référence qui sont doués d'une translation rectiligne et uniforme par rapport au trièdre $O_1 x_1 y_1 z_1$, c'est-à-dire qui lui correspondent par le groupe de la Cinématique classique.