NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

RENÉ THIRY

Remarques au sujet d'un des problèmes de mécanique donnés au concours d'agrégation en 1921

Nouvelles annales de mathématiques 5e série, tome 1 (1922), p. 165-172

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1922_5_1__165_1>

REMARQUES AU SUJET D'UN DES PROBLÈMES DE MÉCANIQUE DONNÉS AU CONCOURS D'AGRÉGATION EN 1921 [1];

PAR M. RENÉ THIRY

(Strasbourg).

La deuxième question de l'épreuve de Mécanique

---

[1] Je me propose de traiter ici, à un point de vue un peu différent, le sujet étudié dans un article précédent par M. G. Bouligand (p. 65). Comme les conclusions semblent tout à fait divergentes, quelques explications complémentaires ne seront sans doute pas inutiles.

Dans son travail, M. Bouligand, en admettant qu'à chaque choc la vitesse du centre de gravité du pendule est augmentée de la quantité constante $V.10^{-6}$, néglige devant l'unité le rapport de la masse de la balle à celle du pendule. Avec les données de l'énoncé, ce rapport est égal à 10^{-6}, il est donc naturel de le négliger et l'on arrive ainsi à la conclusion qu'il n'y a pas d'état d'équilibre apparent limite. Dans l'article ci-dessus, au contraire, je me propose de démontrer que si l'on ne fait pas cette approximation, pourtant justifiée, le pendule tend vers une position d'équilibre limite qu'il atteint en un temps fini.

En réalité ces deux résultats, fort dissemblables en apparence, sont pratiquement très proches l'un de l'autre, comme la suite de rationnelle proposée au concours d'agrégation en 1921 [1] porte sur la détermination de la vitesse de balles de mitrailleuse qui, frappant à intervalles réguliers un pendule balistique, lui font prendre une position apparente d'équilibre dont l'angle avec la verticale est une donnée du problème [2].

On pouvait facilement traiter le problème tel qu'il était posé, en admettant l'existence de cette position apparente d'équilibre et en raisonnant directement à partir d'elle. Il est cependant intéressant, en restant le plus possible dans les conditions de l'énoncé, de se demander si cette position existe réellement et de rechercher comment varient les élongations du pendule, en supposant que celui-ci parte du repos, par exemple.

Dans le but d'éviter les calculs un peu plus compliqués du mouvement pendulaire exact, nous remplacerons le problème posé par le suivant :

Le centre de gravité G *d'un corps solide* S, *de*

---

l'article le montre, la rapidité avec laquelle le pendule tend vers la position apparente d'équilibre tient à la façon dont la quantité $(1+10^{-6})^n$ augmente avec le nombre n des chocs. Or ceci se produit avec une extrême lenteur et bien que, *théoriquement*, l'état d'équilibre soit atteint au bout d'un *temps fini*, ce temps sera tellement considérable qu'aux yeux de l'expérimentateur il apparaîtra comme pratiquement *infini*. En tout cas, il est tel, comme je le dis plus loin, qu'il devient à peu près impossible de négliger par rapport à la masse du pendule celles des balles qui, successivement, viennent faire corps avec lui.

Je suis au surplus tout à fait d'accord avec M. Bouligand sur le rôle essentiel que, dans le phénomène vrai, doivent jouer les résistances passives pour établir, *considérablement plus vite* que la théorie ne le montre, l'état apparent d'équilibre. J'ai néanmoins pensé qu'il y avait intérêt à présenter l'étude théorique exacte, ne serait-ce que pour la méthode de calcul mise en œuvre.

(1) *Voir* note ci-dessus.

(2) *Voir* le texte de ce problème dans l'article de M. Bouligand.

masse M, *est assujetti à se mouvoir sur une droite horizontale* Ox ; *ce corps est soumis, de la part du point* O, *à l'action d'une force attractive, appliquée en* G, *proportionnelle à la distance et égale à* M$k^2\overline{GO}$. *Primitivement, le corps* S *est au repos en* O ; *à intervalles réguliers, des balles de mitrailleuse, de masse* m, *lancées de gauche à droite le long de* Ox *avec une vitesse* V, *viennent le frapper. Le choc a lieu à la façon des corps mous, c'est-à-dire qu'immédiatement après lui, le corps et la balle ont la même vitesse; mais nous supposerons cependant que la balle ne pénètre pas dans le corps et que, sous l'action de son poids, par exemple, elle se détache de lui. Nous nous proposerons de déterminer les élongations successives du corps* S *au moment des différents chocs.*

Le problème ainsi posé est très approximativement identique au problème primitif, si l'on admet que les oscillations du pendule balistique restent assez petites pour que l'approximation classique du mouvement pendulaire à faibles amplitudes soit valable.

Nous appellerons x_n et v_n l'élongation et la vitesse du point G immédiatement *après* le $n^{\text{ième}}$ choc ; un calcul élémentaire nous montre qu'immédiatement *avant* le $(n+1)^{\text{ième}}$ choc, l'élongation et la vitesse seront respectivement devenues égales à

$$\begin{aligned}\overline{x}_n &= \quad x_n \cos\varepsilon + \frac{v_n}{k}\sin\varepsilon,\\ \overline{v}_n &= -x_n k\sin\varepsilon + v_n\cos\varepsilon,\end{aligned}$$

en posant, pour simplifier l'écriture, $\varepsilon = k.t$, et t désignant l'intervalle séparant les différents chocs.

Après le $(n+1)^{\text{ième}}$ choc, l'élongation ne se trouve pas modifiée, mais la vitesse acquiert brusquement une valeur nouvelle donnée par le théorème de la conservation des quantités de mouvement appliqué au système formé par le corps et la balle et égale à

$$\frac{\bar{v}_n + \lambda V}{1 + \lambda} \qquad \left(\text{en posant } \lambda = \frac{m}{M}\right).$$

On a donc les formules de récurrence suivantes :

$$x_{n+1} = x_n \cos\varepsilon + \frac{v_n}{k}\sin\varepsilon,$$

$$v_{n+1} = \frac{1}{1+\lambda}[-x_n k \sin\varepsilon + v_n \cos\varepsilon + \lambda V],$$

qui nous permettront de calculer de proche en proche x_n et v_n en fonction de leurs valeurs après le premier choc, valeurs qui sont

$$x_1 = 0, \qquad v_1 = \frac{\lambda V}{1+\lambda}.$$

La résolution de ces formules de récurrence est très facile ; en effet, formons la combinaison

$$u_{n+1} = s\,x_{n+1} + v_{n+1}$$

et cherchons à déterminer le paramètre s de façon que, dans le second membre, x_n et v_n interviennent seulement par l'expression

$$u_n = s\,x_n + v_n.$$

Un calcul tout élémentaire montre qu'il suffit de prendre pour s une racine de l'équation du second degré

$$(1) \qquad s^2(1+\lambda) - \lambda k\, s \cot\varepsilon + k^2 = 0.$$

Le discriminant de cette équation est égal à

$$k^2[\lambda^2 \cot^2\varepsilon - 4(1+\lambda)];$$

nous le supposerons négatif (ce qui est largement réalisé avec les données numériques du problème posé); les racines s et s' de l'équation seront donc imaginaires conjuguées et l'on aura

$$u_{n+1} = \alpha u_n + \beta$$

en posant pour un moment

$$\alpha = \frac{\cos\varepsilon}{1+\lambda} + s\frac{\sin\varepsilon}{k},$$
$$\beta = \frac{\lambda V}{1+\lambda}.$$

En écrivant cette égalité pour différentes valeurs de n

$$\begin{array}{ll} 1 & u_n = \alpha u_{n-1} + \beta, \\ \alpha & u_{n-1} = \alpha u_{n-2} + \beta, \\ \cdot & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \alpha^{n-2} & u_2 = \alpha u_1 + \beta, \end{array}$$

en les multipliant par les puissances de α mises en regard et en les ajoutant, on a immédiatement

$$u_n = \alpha^{n-1} u_1 + \beta \frac{\alpha^{n-1} - 1}{\alpha - 1},$$

ou encore, en remplaçant u_1 par sa valeur, qui est précisément égale à β,

$$u_n = \beta \frac{\alpha^n - 1}{\alpha - 1}.$$

En isolant la partie réelle et la partie imaginaire, il serait facile de tirer de là x_n et v_n.

Le carré du module de la quantité α est égal, en appelant α' la quantité imaginaire conjuguée, à

$$\alpha\alpha' = \left[\frac{\cos\varepsilon}{1+\lambda} + s\frac{\sin\varepsilon}{k}\right]\left[\frac{\cos\varepsilon}{1+\lambda} + s'\frac{\sin\varepsilon}{k}\right].$$

Un calcul facile donne alors pour le module de α la valeur

$$\frac{1}{\sqrt{1+\lambda}},$$

quantité inférieure à l'unité.

Il s'ensuit que, lorsque le nombre des chocs augmente indéfiniment, α^n tendra vers zéro et que u_n aura une limite

$$u = \frac{\beta}{1-\alpha}.$$

On en conclut que x_n et v_n séparément auront des limites x et v données par les formules

$$s\,x + v = \frac{\beta}{1-\alpha},$$

$$s'x + v = \frac{\beta}{1-\alpha'},$$

la deuxième étant déduite de la première par le changement de i en $-i$.

D'où, par soustraction et après un calcul élémentaire que je ne reproduis pas,

$$(2) \qquad x = \frac{\lambda}{2+\lambda}\,\frac{V}{k}\cot\frac{\varepsilon}{2},$$

formule qui donne l'élongation de la position apparente d'équilibre limite.

La restriction que nous avons faite plus haut en supposant que le discriminant de l'équation (1) était négatif, restriction qui peut encore se mettre sous la forme

$$\sin\varepsilon > \frac{\lambda}{2+\lambda},$$

n'a rien d'essentiel. On vérifierait sans peine que, si elle n'était pas remplie, la quantité α, bien que réelle, serait encore inférieure à 1. Dans ce dernier cas, x_n

tendrait vers sa limite de façon monotone au lieu d'osciller autour d'elle comme cela se présente en général dans le premier cas. Il est du reste vraisemblable que, si l'on cherchait à modifier les données numériques du problème proposé au concours pour rentrer dans ce dernier cas, les oscillations du pendule ne resteraient pas assez petites pour que l'approximation qui nous a conduits à notre nouvel énoncé reste justifiée. Je n'insisterai pas davantage sur ce détail.

Si, au lieu de partir du repos, on était parti de conditions initiales quelconques, le calcul eût été encore valable et la limite eût été la même. En particulier, si l'on avait eu précisément

$$u_1 = \frac{\beta}{1-\alpha}$$

pendant toute la durée des chocs, x_n serait resté constant et égal à x.

Enfin de la formule (2) on tire la valeur de la vitesse inconnue V, en fonction de k, x, λ, ε, sous la forme

$$V = \frac{2+\lambda}{\lambda} k x \operatorname{tang} \frac{\varepsilon}{2}.$$

Avec les données numériques du problème donné au concours, et en assimilant (vu l'absence d'indications permettant de calculer les moments d'inertie) le pendule balistique à un pendule simple de longueur $l = 10^{\mathrm{m}}$, on a

$$k = \sqrt{\frac{g}{l}}, \qquad \varepsilon = kt = \sqrt{\frac{g}{l}}\, 10^{-1},$$
$$x = \frac{3\pi}{2000} l, \qquad \lambda = 10^{-6};$$

on trouve alors pour V une valeur de l'ordre de 4700 m : s, évidemment trop forte pour que les données correspondent à une expérience réelle.

Il est à remarquer que, si l'on s'en tient à l'approximation obtenue en remplaçant tang $\frac{\varepsilon}{2}$ par $\frac{\varepsilon}{2}$, la longueur du pendule n'intervient pas dans le calcul de V. Elle joue cependant un rôle par son ordre de grandeur qui nous permet d'assimiler sans invraisemblance le pendule composé à un pendule simple.

Il est possible encore, toujours avec ces données numériques, de calculer, lorsque la position d'équilibre est à peu près atteinte, de combien le pendule s'en écarte à chaque choc; on trouve que l'espèce de vibration qui se produit est de l'ordre de $\frac{1}{800}$ de l'angle d'écart. L'apparence est donc bien celle d'un véritable équilibre.

Enfin il est possible de s'assurer que, pendant tout le mouvement, l'amplitude à un instant quelconque reste assez faible pour que l'approximation faite au début soit valable ([1]).

Remarquons cependant, pour terminer, que la façon dont le pendule tend vers sa position d'équilibre dépend de la rapidité avec laquelle α^n tend vers zéro. Or ici ce fait se produit avec une très grande lenteur, car $\frac{1}{\sqrt{1+\lambda}}$ est très voisin de 1. Il faudra donc un nombre considérable de balles pour que l'équilibre soit à peu près atteint et il paraît difficile que l'on puisse, dans l'expérience véritable du pendule balistique, négliger la masse des balles tirées devant celle du pendule lui-même.

([1]) Il y a encore un autre point par lequel le problème schématique traité dans cet article diffère du problème réel. Nous avons supposé que les chocs sur le corps se faisaient à intervalles régulièrement espacés, alors qu'en toute exactitude il n'en est ainsi que pour les passages des balles successives au point O; mais la correction qui en résulterait n'aurait d'importance que pour des balles animées d'une faible vitesse.