B. NIEWENGLOWSKI

Démonstration de la formule de l’accélération dans le mouvement relatif

Nouvelles annales de mathématiques 5e série, tome 1 (1922), p. 147-150

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1922_5_1__147_1>

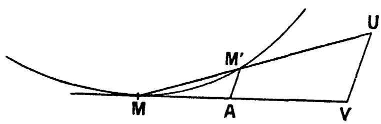
[R1d]

DÉMONSTRATION DE LA FORMULE DE L'ACCÉLÉRATION DANS LE MOUVEMENT RELATIF ;

PAR M. B. NIEWENGLOWSKI.

1. Soient (*fig.* 1) M et M′ les positions d'un point

Fig. 1.



matériel aux époques t et $t + \Delta t$. Portons sur la tangente en M à la trajectoire de ce mobile le vecteur

$$\overline{MA} = \bar{v}\Delta t,$$

$\bar{v}$ désignant le vecteur vitesse au temps t. On sait que le vecteur $\overline{AM'}$ est la *déviation* et que le vecteur accélération $\bar{\gamma}$, à l'époque t, vérifie l'équation

$$\bar{\gamma} = \lim \frac{2.\overline{AM'}}{\overline{\Delta t}^2}.$$

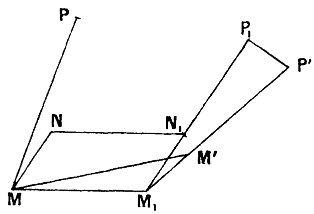
Il en résulte immédiatement que, si $\overline{MV} = \bar{v}$ et $\overline{MU} = \frac{\overline{MM'}}{\Delta t} = \bar{u}$, $\bar{u}$ désignant le vecteur vitesse moyenne, pour l'intervalle $(t,\ t + \Delta t)$, on a aussi

$$\overline{\gamma} = \lim 2 \frac{\overline{VU}}{\Delta t} = \lim 2 \frac{\overline{u} - \overline{v}}{\Delta t}$$

quand Δt tend vers zéro.

2. Cela étant, supposons qu'un mobile se déplace sur une courbe C (*fig.* 2), qu'il y soit au point M à

Fig. 2.



l'époque t et au point N à l'époque $t + \Delta t$; en même temps, cette courbe se déplace sans se déformer, de telle façon que le point de cette courbe qui coïncidait avec M à l'époque t occupe la position M_1 à l'époque $t + \Delta t$, la courbe C se confondant alors avec une courbe égale C', passant par M_1, et enfin le point N de la courbe C occupe sur C', à l'époque $t + \Delta t$, la position du point M'. En définitive, le point M aura subi le déplacement $\overline{MM'}$. Pour obtenir ce déplacement, on peut, en premier lieu, soumettre la courbe C à la translation $\overline{MM_1}$ qui l'amène à une position C_1; en second lieu, faire subir à C_1 une rotation autour d'un axe passant par M_1, qui amènera C_1 en C'. Les deux déplacements successifs feront passer N en N_1, puis en M'.

Soit $\overline{v}$ le vecteur *vitesse absolue* de M sur sa trajectoire MM'; soit $\overline{v_r}$ le vecteur *vitesse relative* de M sur la courbe C, et enfin soit $\overline{v_e}$ le vecteur *vitesse d'entraînement* du point de C, coïncidant successivement avec M et M_1 ; on sait que

$$\overline{v} = \overline{v_e} + \overline{v_r}.$$

L'égalité vectorielle

$$\overline{MM'} = \overline{MM_1} + \overline{M_1M'},$$

en posant

$$\frac{\overline{MM'}}{\Delta t} = \overline{u}, \qquad \frac{\overline{MM_1}}{\Delta t} = \overline{u_e}, \qquad \frac{M_1M'}{\Delta t} = \overline{w},$$

peut s'écrire

$$(1) \qquad \overline{u} = \overline{u_e} + \overline{w}.$$

Si, en outre, on pose

$$\frac{\overline{MN}}{\Delta t} = \frac{\overline{M_1N_1}}{\Delta t} = \overline{u_r},$$

on a encore

$$(2) \qquad \overline{u} = \overline{u_e} + \overline{u_r} + (\overline{w} - \overline{u_r}).$$

Les quantités $\overline{u}$, $\overline{u_e}$, $\overline{u_r}$, $\overline{w}$ sont des vitesses moyennes. En retranchant membre à membre les équipollences (1) et (2), on a

$$(3) \qquad \overline{u} - \overline{v} = \overline{u_e} - \overline{v_e} + \overline{u_r} - v_r + (\overline{w} - \overline{u_r}).$$

Si l'on multiplie les deux membres par $\frac{2}{\Delta t}$ et si l'on fait tendre Δt vers zéro, en vertu de la remarque faite au début, on obtient

$$\overline{\gamma} = \overline{\gamma_e} + \overline{\gamma_r} + 2 \lim \frac{w - u_r}{\Delta t},$$

$\overline{\gamma}$, $\overline{\gamma_e}$, $\overline{\gamma_r}$ désignant les vecteurs accélération absolue, accélération d'entraînement, accélération relative; il nous reste à calculer le dernier terme. Si l'on pose

$\overline{M_1 P_1} = \frac{\overline{M_1 N_1}}{\Delta t} = \overline{u_r}$, $\overline{M_1 P'} = \frac{\overline{M_1 M'}}{\Delta t} = \overline{w}$, on voit que

$$\frac{\overline{w} - \overline{u_r}}{\Delta t} = \frac{\overline{P_1 P'}}{\Delta t}.$$

Donc si $\overline{MP} = \overline{v}$, la limite de $\frac{\overline{P_1 P'}}{\Delta t}$ n'est pas autre chose que la vitesse de P autour de l'axe instantanné de rotation mené par M. On sait que cette vitesse est équipollente au moment-vecteur de la rotation ω par rapport au point P, soit (ω, P), ayant pour valeur numérique $\omega v_r sm(\omega, v_r)$. On a, par suite,

$$\overline{\gamma} = \overline{\gamma_e} + \overline{\gamma_r} + \overline{2\omega v_r \sin(\omega, v_r)}.$$

Le dernier terme, qui se nomme souvent γ_c pour rappeler le nom de Coriolis qui l'a calculé le premier, est un vecteur perpendiculaire au plan contenant la vitesse v_r et la rotation ω et dirigé dans le sens dans lequel l'extrémité du vecteur $\overline{v_r}$ est entraînée par la rotation instantanée.