

Certificats de mécanique rationnelle

Nouvelles annales de mathématiques 5^e série, tome 1
(1922), p. 113-119

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1922_5_1__113_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1922, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

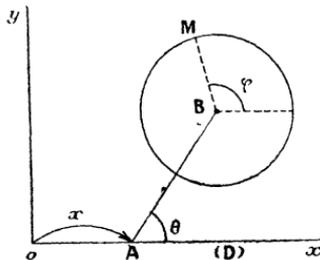
NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

CERTIFICATS DE MÉCANIQUE RATIONNELLE.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — Une barre homogène pesante AB, de longueur $2l$, de masse m , est assujettie à rester dans un plan vertical (P), son extrémité A glissant sur une horizontale (D) de ce plan; en outre, un disque circu-



laire (C) homogène pesant, de masse m , de rayon $r (< l)$ est fixé par son centre à l'extrémité B autour de laquelle

il peut tourner librement [en restant dans le plan (P)].
Toutes les liaisons sont supposées sans frottement.

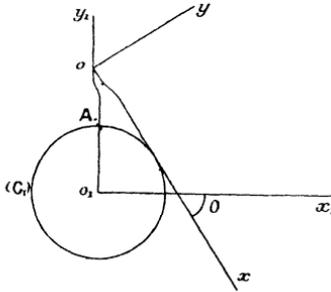
1° Former les équations du mouvement du système et montrer qu'elles s'intègrent par quadratures.

2° Existe-t-il des mouvements dans lesquels la barre AB glisse en restant parallèle à elle-même? Que peut-on dire alors de la réaction de (D) et de la vitesse de A?

3° A un certain instant t , on fixe brusquement l'extrémité A en un point de (D); calculer la perte de force vive du système, connaissant l'état des vitesses immédiatement avant l'instant t .

NOTATIONS. — On prendra (D) pour axe Ox , l'axe des y étant dirigé suivant la verticale ascendante; on désignera l'abscisse de A par x , l'angle de AB avec Ox par θ , et l'angle d'un rayon déterminé BM de (C) avec Ox par φ .

ÉPREUVE PRATIQUE. — Un plan mobile (rapporté aux axes rectangulaires xOy) est assujéti à glisser sur un plan fixe (rapporté aux axes rectangulaires $x_1O_1y_1$) en



satisfaisant aux conditions suivantes : La droite Ox du plan mobile reste tangente au cercle (C_1) de centre O_1 et de rayon a du plan fixe, le point O de la barre décrit le prolongement Ay_1 d'un diamètre de (C_1) .

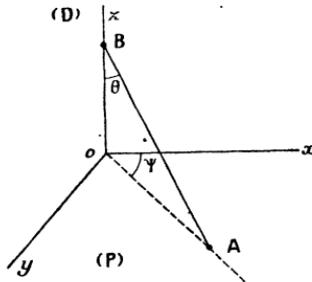
1° Trouver la base et la roulante;

2° Former l'équation du cercle des inflexions dans le plan mobile et chercher ses intersections avec O_1y_1 .

(On désignera l'angle de Ox avec O_1x_1 par θ ; on remarquera que sur la figure cet angle est négatif.)

(Poitiers, juin 1921.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — Une barre matérielle homogène pesante AB, de section infiniment petite, de longueur $2l$



est assujettie aux liaisons suivantes : son extrémité A glisse sans frottement sur un plan horizontal (P), tandis que son extrémité B décrit sans frottement une verticale fixe (D).

1° Étudier et discuter le mouvement de la barre.

[NOTATIONS. — On prendra pour axe Oz la droite (D), pour axes Ox et Oy deux droites rectangulaires du plan (P) issues de la trace O de (D) sur (P); on désignera par ψ l'angle du plan passant par AB et (D) avec le plan xOz et par θ l'angle de AB avec Oz; dans la discussion on supposera que la barre peut traverser le plan (P).]

2° On supposera que la barre puisse se soulever au-dessus de (P); à quelle condition doivent satisfaire les quantités ψ'_0 et θ'_0 qui définissent les vitesses initiales pour que la barre ne se soulève pas au début du mouvement. Peut-on écrire la condition obtenue en n'employant comme éléments variables que la vitesse v du point C (milieu de AB) et sa hauteur ζ au-dessus de (P)?

3° La barre étant supposée immobile à l'instant t_0 , une balle de dimensions négligeables vient la frapper en son milieu C, avec une vitesse V , dans une direction horizontale, perpendiculaire au plan vertical passant par la barre; aussitôt après le choc, la balle s'incorpore à la barre. Calculer les valeurs de ψ' et θ' immédiatement après le choc.

(Poitiers, novembre 1921.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — Une plaque carrée, homogène, pesante PQRS est assujettie aux liaisons suivantes, réalisées sans frottement: deux sommets consécutifs P et Q glissent sur une même circonférence C fixe dont le plan est horizontal et dont le diamètre est égal aux diagonales de la plaque. Celle-ci peut donc librement tourner autour de l'axe Oz de C et autour du côté PQ.

1° Étudier le mouvement de la plaque. On limitera la discussion au cas où, à l'instant initial, la plaque fait un angle θ_0 avec le plan de C et se trouve animée d'une rotation de vitesse ω autour de Oz, en cherchant uniquement le sens de la variation initiale de l'angle θ du plan de la plaque avec celui de C;

2° La plaque étant immobile, verticale, au-dessous du plan de C, on applique une percussion en son centre; quel est l'état des vitesses immédiatement après la percussion?

ÉPREUVE PRATIQUE. — Une roue de poids P est assimilable à une circonférence homogène de rayon r, dont le centre O est situé sur l'axe Oz de rotation, mais dont le plan Q fait un angle α avec le plan R normal à l'axe. On prend pour origine le centre O, pour axe Oy, l'intersection de Q et de R.

1° Équation de l'ellipsoïde d'inertie de la roue relatif au point O;

2° Évaluer les réactions qui s'exerceraient, pendant un mouvement de la roue de vitesse angulaire ω autour de Oz supposé horizontal et fixe, sur les tourillons qu'on assimilera à deux points situés sur Oz à une même distance r du centre. Application $\alpha = 1^\circ$; $\omega = 200$ tours par minute;

3° Même question en supposant qu'au poids P s'ajoute un couple d'axe Oz, de moment connu N.

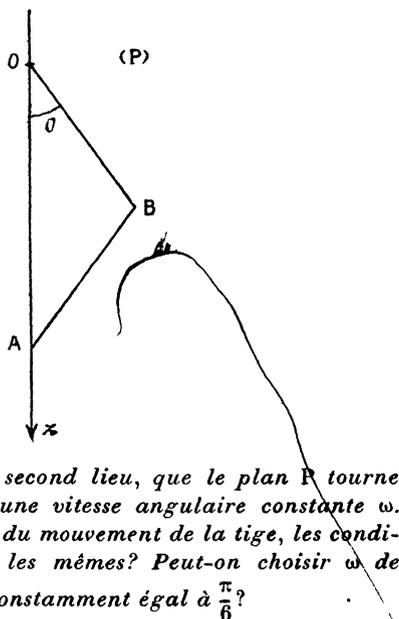
(Grenoble, juin 1920.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — Une tige rectiligne homogène pesante AB de masse M se meut dans un plan vertical P; l'une de ses extrémités A décrit la verticale descendante Oz; l'autre B est reliée à O par un fil OB, de même longueur $2l$ que la tige. Il n'y a pas de frottement:

1° Le plan P étant fixe, trouver le mouvement de la tige, le fil étant censé tendu. On suppose qu'à l'instant initial,

$$\theta = \frac{\pi}{6} \quad \text{et} \quad \frac{d\theta}{dt} = 0.$$

2° Dans les mêmes conditions, calculer la réaction $M \times R$ agissant en A et la tension $M \times T$ du fil. Quelles sont les valeurs de R et de T à l'instant initial?



3° On suppose, en second lieu, que le plan P tourne autour de Oz avec une vitesse angulaire constante ω . Quelle est l'équation du mouvement de la tige, les conditions initiales étant les mêmes? Peut-on choisir ω de manière que θ reste constamment égal à $\frac{\pi}{6}$?

EPREUVE PRATIQUE. — Un solide homogène S, de masse M, est limité par deux sphères concentriques de rayon r et 2r.

1° Ellipsoïde d'inertie de S relatif à un point O de sa surface extérieure;

2° S, étant censé non pesant et mobile autour de O, supposé fixe, prend un mouvement à la Poinsot. A l'instant initial, il est animé d'une rotation autour d'un axe $O\Omega$ faisant un angle de 45° avec la droite qui joint O au centre commun C des deux sphères. On demande la

force vive de S, son moment cinétique $O\sigma$ par rapport à O; on donnera les projections $O\sigma_1$ et $O\sigma_2$ de ce vecteur sur le plan tangent en O et sur OC;

3° Définir géométriquement les deux cônes roulants correspondant au mouvement précédent.

(Grenoble, novembre 1920.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — Un solide S est limité extérieurement par un cylindre circulaire droit; la distribution des masses est telle que le centre de gravité G est sur l'axe Gx du cylindre, que Gx est un des axes principaux d'inertie relatif à G, et que les moments d'inertie par rapport aux trois axes principaux sont : pour Gx , $A = 3MK^2$; pour Gy , $B = 4MK^2$; pour Gz , $C = 5MK^2$, M étant la masse de S. Le solide étant placé sur un plan horizontal parfaitement poli, étudier son mouvement et effectuer la réduction au point G des réactions exercées par le plan. On appelle ψ l'angle de Gx et d'une horizontale fixe Ox_1 ; θ l'angle de Gz et de la verticale ascendante Oz_1 . On désignera par ξ , η , a les coordonnées de G par rapport au trièdre $Ox_1y_1z_1$ fixe; a est constant. A l'instant initial,

$$\psi' = \frac{d\psi}{dt} = \omega, \quad \theta = 0, \quad \frac{d\theta}{dt} = \theta' = \omega\alpha.$$

On discutera en faisant varier α .

ÉPREUVE PRATIQUE. — Une plaque homogène pesante est limitée par deux circonférences concentriques C et c, de centre O et de rayons R et r :

1° Elle oscille autour d'un point fixe de la petite circonférence, dans un plan vertical fixe. Longueur du pendule synchrone de ce pendule composé;

2° On considère un second mouvement de la plaque dans un plan vertical fixe où c roule sans glisser sur une circonférence fixe c_1 de centre O_1 , et de rayon $r_1 < r$, intérieure à c. Etudier les petites oscillations correspondant à ce roulement sans glissement.

Dans cette seconde partie, on appellera A_1 le point le plus élevé de c_1 , A le point de c qui vient coïncider avec A_1 ; on prendra comme paramètre l'angle θ de OA avec O_1A_1 .

(Grenoble, juin 1921.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — Un disque circulaire homogène, de rayon R , et une tige OA rectiligne homogène, de longueur $4R$, de même masse M , se meuvent dans un plan vertical fixe sous l'action de la pesanteur. Le disque repose sur une horizontale fixe Ox , la tige tourne autour du point fixe O , qui est son extrémité, et elle touche le disque. Il n'y a pas de frottement.

1° Étudier le mouvement du système. On prend pour paramètres l'abscisse x du centre du disque et l'angle φ de Ox avec un rayon marqué sur le disque

$$At = 0, \quad \frac{d\varphi}{dt} = \omega, \quad x = a > R \frac{dx}{dt} = 0;$$

2° Déterminer, à l'instant initial, la réaction au point de contact du disque et de la tige.

N. B. — On ne s'occupera pas du cas où la tige cesse d'être tangente au disque.

ÉPREUVE PRATIQUE. — Un point de masse m , soumis à une résistance mKv^2 , tombe verticalement. Son mouvement tend à devenir uniforme; quelle est la vitesse limite a ? Quel espace E parcourt le mobile pendant que sa vitesse passe d'une valeur v_0 à une valeur v_1 et quel est le temps T correspondant à cette variation de vitesse?

Application numérique — Un parachute et son passager pèsent ensemble 100^{kg} ; la résistance de l'air, mesurée dans le système industriel, est $0,16Sv^2$. Calculer S de manière que la vitesse limite soit de 4^{m} par seconde. Calculer alors E et T pour $v_0 = 30 \text{ m} : \text{s}$ et $v_1 = 4,4 \text{ m} : \text{s}$.

(Grenoble, novembre 1921.)