M. D'OCAGNE

Équation angulaire d'un conoïde droit. Application au cylindroïde envisagé dans ses rapports avec la distribution des courbures autour d'un point d'une surface

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 20 (1920), p. 51-55

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1920_4_20__51_0>

[O4h][O5f]

ÉQUATION ANGULAIRE D'UN CONOÏDE DROIT. APPLICATION AU CYLINDROÏDE ENVISAGÉ DANS SES RAPPORTS AVEC LA DISTRIBUTION DES COURBURES AUTOUR D'UN POINT D'UNE SURFACE ;

Par M. M. d'OCAGNE.

1. Si l'on prend le plan Oxy comme plan directeur d'un conoïde droit et si l'on suppose la directrice rectiligne de ce conoïde confondue avec Oz, on peut définir complètement cette surface par la relation entre le z de chaque génératrice et l'angle φ que fait cette génératrice avec Ox,

$$F(z, \varphi) = 0.$$

Telle est ce que nous appelons l'*équation angulaire* du conoïde considéré [1].

---

[1] Si l'on prend dans cette équation z et φ comme des coordonnées polaires rapportées au pôle O et à l'axe Ox, on obtient une courbe qui peut être regardée comme représentative de la distribution des génératrices le long de la directrice rectiligne. On voit que la sous-normale polaire en chaque point de cette courbe fait connaître le paramètre de distribution de la génératrice correspondante du conoïde et, puisque la directrice rectiligne se confond ici avec la ligne de striction, par suite, que les points centraux de toutes les génératrices se projettent en O sur Oxy, il en résulte que l'extrémité de la sous-normale polaire se confond en projection avec le point représentatif de la distribution des plans tangents pour chaque génératrice. (*Cours de Géométrie pure et appliquée de l'École Polytechnique*, t. I, p. 229.)

On remarquera que, pour chaque génératrice, la valeur de $\frac{dz}{d\varphi}$ représente, par définition même, le paramètre de distribution le long de cette génératrice.

Voici quelques exemples :

1° *Surface de vis à filet carré.* — Si l'on prend pour Ox la génératrice de la surface située dans Oxy, l'équation est

$$z = h\varphi.$$

2° *Paraboloïde équilatère.* — Si l'on place l'origine O au sommet et que l'on prenne pour Ox la génératrice passant par ce point, on a

$$z = h \operatorname{tang}\varphi.$$

3° *Cylindroïde.* — Avec la définition de ce conoïde telle qu'elle est donnée dans notre *Cours de Géométrie pure et appliquée de l'Ecole Polytechnique* (t. I, p. 235), il suffit de prendre comme directrice la section du cylindre de révolution tangent à Oyz le long de Oz par un plan mené par Oy et coupant ce cylindre sur la hauteur h, pour obtenir immédiatement l'équation

$$z = h \cos^2\varphi.$$

4° *Conoïde droit à noyau sphérique.* — Si, se rapportant à la définition donnée dans notre *Cours* (t. I, p. 233), on prend pour Oxy le plan diamétral horizontal de la sphère en faisant passer Ox par le centre de cette sphère de rayon r, et si l'on appelle a l'abscisse de ce centre, on a

$$z^2 = r^2 - a^2 \sin^2\varphi,$$

qui, dans le cas où la directrice rectiligne Oz est tangente à la sphère ($a = r$), se réduit à

$$z = r\cos\varphi.$$

5° *Partie conoïdale de la voûte d'arêtes en tour ronde.* — Si l'on se reporte à la définition de ce conoïde donnée dans le même *Cours* (t. II, p. 117), que l'on appelle a la montée de la voûte (rayon du cercle méridien de sa partie torique) et φ_0 l'angle que fait avec l'axe de la projection horizontale du conoïde la génératrice de ce conoïde située dans le plan des naissances (angle AωF de la figure 193, à l'endroit cité) on trouve, sans difficulté, l'équation

$$z^2 = a^2\left(1 - \frac{\varphi^2}{\varphi_0^2}\right).$$

2. Reprenons l'équation angulaire ci-dessus du cylindroïde (3°). Si l'on transporte l'origine en un point quelconque de Oz, sur lequel A_1 et A_2 sont les points extrêmes de ce conoïde, et si l'on pose $OA_1 = z_1$, $OA_2 = z_2$, les angles étant toujours comptés à partir de la même direction Ox, on voit, puisque l'on a

$$h = z_1 - z_2,$$

que l'équation devient

$$z - z_2 = (z_1 - z_2)\cos^2\varphi$$

ou

$$z = z_1\cos^2\varphi + z_2\sin^2\varphi.$$

Cette équation, obtenue d'une façon plus détournée par M. Chapelon (*N. A.*, 1906, p. 182), fait voir immédiatement, comme l'a remarqué cet auteur, que l'inverse du lieu des centres de courbure relatifs à un point d'une surface, par rapport à ce point est un cylindroïde. Ces centres de courbure sont, en effet, d'après le théorème de Meusnier, distribués, dans chaque plan normal, faisant avec Ox l'angle $\varphi + \frac{\pi}{2}$, sur le cercle ayant pour diamètre le rayon de courbure r donné par la formule d'Euler

$$\frac{1}{r} = \frac{\cos^2\varphi}{r_1} + \frac{\sin^2\varphi}{r_2}.$$

Par une inversion de puissance K, ces cercles donnent, dans chacun de ces plans normaux, une droite faisant avec Ox l'angle $\varphi + \frac{\pi}{2}$ et dont la distance z à O est donnée par

$$z = \frac{K}{r}.$$

On a, par suite, si les valeurs de z dans les plans principaux sont z_1 et z_2,

$$z = z_1 \cos^2\varphi + z_2 \sin^2\varphi,$$

qui n'est autre, d'après ce qu'on vient de voir, que l'équation angulaire d'un conoïde. Mais il y a plus : si l'on prend (en grandeur et signe) $K = r_1 r_2$, il vient $z_1 = r_2$, $z_2 = r_1$, et, par suite,

$$z = r_2 \cos^2\varphi + r_1 \sin^2\varphi.$$

Cette formule, rapprochée de celle qui fait connaître le rayon de courbure du contour apparent de la surface projetée orthogonalement (*voir* notre *Cours*, t. I, p. 190), montre que z est le rayon de courbure, à l'origine, du contour apparent de la surface projetée sur celui de ses plans normaux en O qui fait, avec Ox, l'angle $\varphi + \frac{\pi}{2}$. La droite inclinée à l'angle φ sur Ox, à cette distance z de O, n'est donc autre que l'axe de courbure de ce contour apparent. Elle est à angle droit sur la droite inverse du cercle de Meusnier, ci-dessus trouvée. D'où ce théorème :

Si la puissance d'inversion est prise égale au *produit des rayons de courbure en* O, *le cylindroïde inverse, par rapport à* O, *de la surface lieu des centres de courbure relatifs à* O, *est identique à celui que l'on obtient en faisant tourner de* 90° *autour de la normale en* O *le lieu des axes de courbure, relatifs à ce même point, des contours apparents de la surface donnée projetée sur tous ses plans normaux en* O.